La testualità del libro di geometria.
Didattica della matematica e analisi linguistico-argomentativa del testo scolastico.

Tesi di
Michele Canducci

Direttore di tesi
Prof. Andrea Rocci

Co-direttore di tesi
Prof.ssa Silvia Sbaragli

Presentata alla
Facoltà di comunicazione, cultura e società
Università della Svizzera italiana

per il titolo di
Dottore in Scienze della comunicazione
Specializzazione in Discourse and Argumentation

Ottobre, 2021

Riassunto

Matematica e italiano sono frequentemente considerate discipline distanti fra loro, nettamente separate per contenuti e attitudini: la matematica viene tipicamente vista come materia arida, fredda, logica, rappresentante per eccellenza del mondo scientifico; l'italiano invece, soprattutto nelle sue realizzazioni letterarie, è vista come materia legata alla sfera dei sentimenti e delle emozioni, rappresentante ideale del mondo umanistico. Questa dicotomia è presente anche in ambito didattico, e genera luoghi comuni e convinzioni difficili da scardinare, con il conseguente rischio di allontanamento da parte degli studenti dalla disciplina matematica. D'altra parte, numerosi studi nell'ambito della ricerca in didattica della matematica hanno ormai da tempo evidenziato come esistano profonde connessioni tra apprendimento della matematica e dimensione linguistica. La presente dissertazione si pone sulla scia di queste ricerche: partendo dal presupposto che una visione integrata tra le due discipline rappresenti un fecondo terreno di indagine, viene presentata una ricerca interdisciplinare il cui obiettivo è indagare la testualità del libro di testo scolastico di geometria.

La tesi è di natura cumulativa e si inserisce all'interno del progetto FNS *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto n. 176339), il cui intento è di indagare, da un punto di vista congiunto tra didattica della matematica e linguistica, le caratteristiche a più livelli di un corpus, denominato DFA-Italmatica, composto da 142 libri di testo di geometria in lingua italiana in uso nelle scuole elementari e medie italiane e svizzere. Di questi libri si è scelto di guardare all'ambito geometrico, focalizzandosi in particolare sul tema dei *poligoni*. Tale progetto ha rappresentato il contesto di sfondo dentro al quale si è svolta la ricerca di dottorato. Nella ricerca qui presentata, la testualità del libro di testo di geometria è esplorata attraverso tre dimensioni: la prima dimensione globale guarda al libro nei suoi aspetti multimodali; la seconda dimensione guarda alla natura e alle caratteristiche delle argomentazioni presenti nei testi; una terza dimensione guarda agli aspetti grammaticali del libro di testo.

A queste tre dimensioni corrispondono quattro articoli che compongono il corpo della tesi.

L'Articolo 1 è presentato nel capitolo 2, e indaga la dimensione multimodale del libro di testo. In questo contributo si è cioè tenuta in considerazione la presenza di *modi* semiotici di natura diversa tra loro quali sono testo scritto e figure, ma anche strategie semiotiche multimodali che possono avere la funzione di stimolare nel lettore-studente processi cognitivi di fondamentale importanza nell'apprendimento della matematica; in particolare, nell'Articolo viene condotta un'analisi qualitativa su alcune porzioni di libri nelle quali vengono tipicamente definiti gli elementi del poligono: vertici, lati, angoli, diagonali ecc. Dall'analisi emerge come l'utilizzo di alcune strategie multimodali (uso del colore, organizzazione spaziale e segnalazione attraverso linee orientate) possa favorire o ostacolare il processo di conversione semiotica da parte del lettore a seconda delle diverse scelte operate dai *costruttori di senso*, ovvero dall'insieme delle figure professionali – autori, redattori, grafici, illustratori ecc. - che producono il libro di testo.

L'Articolo 2 è presentato nel capitolo 3, e indaga la dimensione argomentativa del libro di testo. In particolare, vengono esaminati i vari tipi di argomentazione con le quali i libri di testo accompagnano i lettori-studenti a interiorizzare risultati geometrici attraverso prove di varia natura. L'Articolo propone un'analisi qualitativa e quantitativa delle tre modalità di movimenti testuali di tipo logico-argomentativo individuati nei libri del corpus DFA-Italmatica: modalità che invita il lettore a "fare" esperienze e azioni di varia natura; modalità che invita a "immaginare" azioni su oggetti geometrici; modalità che invita a "astrarre" rispetto alla manipolazione concreta. I risultati di questo contributo mettono in evidenza come vi siano significativi e bruschi passaggi da una modalità all'altra all'aumentare del livello di scolarità, cosa che potrebbe non corrispondere all'evoluzione cognitiva degli studenti.

Anche l'Articolo 3, presentato nel capitolo 4, indaga la dimensione argomentativa del libro di testo: nel contributo vengono utilizzate le tre lenti retoriche dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio* per analizzare alcuni specifici movimenti testuali, nei quali il lettore-studente è accompagnato a riconoscere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n-2) \cdot 180°$. L'uso di queste tre lenti ha in primo luogo consentito di interpretare le argomentazioni secondo una prospettiva nuova e inesplorata per la didattica della matematica. Dall'analisi qualitativa e quantitativa condotta emerge

poi una notevole varietà di scelte possibili in termini di strategie e argomenti (l'*inventio*), di organizzazione degli stessi (la *dispositio*) e di forma linguistico-testuale (l'*elocutio*) all'interno di un discorso argomentativo, scelte a cui potrebbero corrispondere differenti effetti comunicativi. In particolare, l'esplicitazione di questi livelli di analisi ha messo in luce come vengano a volte effettuate scelte di enfatizzazione o de-enfatizzazione che potrebbero condurre ad ambiguità di natura semantica e inferenziale nel lettore-studente.

Infine, l'Articolo 4 è presentato nel capitolo 5, e indaga gli aspetti grammaticali dell'interfaccio lingua-testo del libro di testo di geometria. In particolare, il contributo si focalizza sull'analisi della realizzazione linguistica del *numero*, cioè del singolare-plurale, all'interno di un sub-corpus formato da 79 porzioni testuali nelle quali vengono solitamente definiti gli elementi del poligono: vertici, lati, angoli, diagonali ecc. Dall'analisi qualitativa e quantitativa condotta emerge come diffuse disomogeneità nella realizzazione della categoria grammaticale del *numero* possano condurre a una problematica mancanza di aderenza rispetto al sapere matematico in gioco, creando così possibili ostacoli di decodifica e comprensione nel lettore-allievo.

Attraverso questi quattro articoli, intrecciati dal punto di vista dell'oggetto di indagine, ma distinti dal punto di vista del focus, la tesi contribuisce a una maggiore comprensione delle componenti che interessano la testualità del libro di geometria a uso didattico, mostrando al contempo la profondità di risultati che un approccio di ricerca interdisciplinare consente di raggiungere.

Ringraziamenti

Questo lavoro di tesi rappresenta un importante traguardo personale, ma è anche il risultato di uno sforzo collaborativo. Per questo motivo è d'obbligo, un obbligo che assolvo con profondo senso di gratitudine, riconoscere l'aiuto di tutte le persone che hanno contribuito, direttamente o indirettamente, alla realizzazione di questo lavoro, e che nel corso di questi anni mi hanno supportato nelle sue diverse fasi.

In primo luogo vorrei ringraziare il mio direttore di tesi, Professor Andrea Rocci, per la disponibilità mostrata nell'accogliermi come dottorando: nonostante i numerosi impegni, è riuscito a dedicare tempo ed energie per approfondire domande e strade da percorrere. Le sue idee e la sua competenza hanno ispirato in diversi modi le riflessioni condotte all'interno della ricerca.

Alla Prof.ssa Silvia Sbaragli, co-direttrice di tesi, va il ringraziamento più sentito, soprattutto per la pazienza che ha avuto nei miei confronti in questi anni di duro, ma spesso allegro, lavoro. Silvia, non ce l'avrei mai fatta senza il tuo aiuto. Oltre all'immensa gratitudine, a te vanno la stima, il rispetto, e il bene di natura più elevata che io possa sentire, sia sul piano professionale sia su quello personale. I confronti e le riflessioni fatte assieme mi hanno fatto crescere in molti modi: grazie delle tue parole sempre indirizzate al bene e al giusto, della tua capacità di comprendere, del tuo stimolo a non mollare.

Un ringraziamento speciale va inoltre a tutti i colleghi e amici del progetto *Italmatica*: Prof.ssa Silvia Demartini, che in questi anni mi ha aiutato più di tutti a entrare nella dimensione linguistica della ricerca, e che mi è stata amica nei momenti gioiosi, ma anche di sconforto, legati sia alla ricerca sia alla vita extra-lavorativa; Elena Franchini, autrice della chiamata che mi ha portato in Ticino, che ha condiviso con me l'anima romagnola di chi sa essere fedele, instancabile lavoratore, e allegro allo stesso tempo; Amos Cattaneo, con il quale ho condiviso il primo giorno di lavoro al DFA, e che nel tempo è diventato un amico su cui poter contare e con cui riflettere, alternando discorsi seri a barzellette; Prof. Simone Fornara, linguista fine e attore (e appassionato di Inter e Federer) che ha condiviso con noi il dramma delle etichette, supportando i lavori del progetto con professionalità e puntualità; Prof. Luca Cignetti, per il suo contributo critico, che spesso ha portato a rivedere le dimensioni teoriche della ricerca.

Ci tengo in questa sede a ringraziare anche i partner del progetto *Italmatica*, con i quali abbiamo condotto riflessioni fondamentali per la buona riuscita del progetto, e dunque anche della tesi: Prof.ssa Angela Ferrari, per aver condiviso con noi il suo modello di testualità e la sua competenza critica nitida ma elastica; Prof. Pier Luigi Ferrari, per aver contribuito da matematico-linguista con le sue idee, la sua visione e le sue linee di ricerca; Prof. Matteo Viale, che condivide la passione per gli aspetti linguistici della matematica; Daniele Puccinelli, senza il quale non avremmo mai potuto estrapolare dati dal corpus.

Vorrei ringraziare inoltre la direzione del DFA, per aver creduto in me in questi anni, valorizzandomi e ascoltandomi: spero di aver ricambiato la vostra fiducia con il mio impegno e i risultati raggiunti.

Ai membri e agli amici del Centro DdM non citati in precedenza devo molto, soprattutto l'avermi sopportato tanti anni: so che non è facile aver a che fare con me, grazie. In particolare, vorrei ringraziare Monica per l'allegria e le ventate di entusiasmo ed ottimismo con le quali mi ha risollevato l'umore in momenti difficili. Carlo, grazie del tuo esempio di giovane maestro e giovane padre, me lo ricorderò. Angelica, grazie della forza che metti nelle cose che fai, e della comprensione di quelle che dici. Luca, Chiara e Vanessa, grazie per avermi accolto nella vostra terra e per aver condiviso con me momenti belli e spensierati.

Un altro ringraziamento va ai miei colleghi del DFA, ai membri dell'amministrazione e al personale della buvette. In particolare: Paola, Andrea, Spartaco, e i ragazzi e le ragazze del CIRSE, con cui ho condiviso le scale e le pause caffè dello stabile B.

Un altro grande grazie va ai miei cari amici in Ticino, fondamentali nei momenti di svago così come in quelli di difficoltà. Laura, Lorenzo, Noah, Giada, Milena, Joris, Cecilia, Luciana, Peter, Mimmo, Federico: vi aspetto in Romagna per un *Piadina e Poesia* autoctono.

In ultimo, vorrei ringraziare la mia famiglia. I miei genitori, autentici eroi, che hanno fatto sacrifici per consentire che io avessi un'educazione il più possibile ampia e completa, e mi hanno donato i talenti e gli strumenti per orientarmi in questo strano mondo. Sappiate che apprezzo tutto quello che avete fatto per me, e che vi voglio bene. A Marco, vero ricercatore, con il quale ho condiviso la passione per il jazz e molte riflessioni sulla vita,

e che mi ha sempre stimolato con affetto a vedere l'altro lato della medaglia: sono fiero e orgoglioso di averti come fratello. A Martina, di cui riconosco in me tratti di sensibilità e che ho sempre visto come una donna forte e tenace, e per la quale ho sempre nutrito un affetto e un'ammirazione smisurati: sono fiero e orgoglioso di averti come sorella. A Michi, per la sua intelligenza irriverente e la scaltrezza con cui affronta la giovinezza.

Alla mia seconda famiglia, la famiglia Pezzi-Sbaragli, va tutto il ringraziamento per avermi accolto nella vostra vita: Franci, Leo, Daniele e Silvia, porterò sempre nel cuore la vostra allegria e la vostra capacità di ascolto e cura degli altri.

Indice

Capitolo 1. Introduzione

Il nucleo fondante di questa dissertazione è rappresentato da una visione sinergica dei rapporti tra due discipline, la matematica e l'italiano, considerate abitualmente piuttosto distanti. La dissertazione è animata in questo senso da due prospettive caratterizzanti: a livello più generale, collocare la ricerca nel solco delle riflessioni che nell'arco della storia della cultura hanno promosso una visione unificante dei saperi umanistici e scientifici; a un livello più operativo, declinare l'interdisciplinarità in contesto didattico, indagando la dimensione linguistica e altri aspetti della testualità matematica per come si presentano nei libri di testo per la scuola.

Frequentemente, nel parlare comune, pensiero scientifico e pensiero umanistico sono presentati come nettamente separati tra loro. Si tratta di una frattura che ha un'origine relativamente recente, ed è dovuta alle alterne vicende della storia del sapere e delle discipline, su cui non è qui significativo parlare approfonditamente; certo è che questa separazione si è radicata in profondità, tanto da arrivare ad essere iconicamente sintetizzata nell'immagine delle "due culture", negli anni Cinquanta del Novecento (Snow, 1959): da un lato la cultura umanistica, dall'altro quella scientifica, poste su due linee parallele destinate a non incontrarsi.

Questa dicotomia è poi alimentata e rafforzata anche in ambito intellettuale, se si pensa alla distinzione fra le scienze cosiddette "dure" e gli studi umanistici. Certamente esistono metodi, oggetti di indagine e caratteristiche proprie di questi due mondi, ma un'antitesi così marcata ha come risultato non secondario anche il generarsi di luoghi comuni che hanno più a che fare con il dominio delle credenze ingiustificate piuttosto che con la necessità di strutturare indagini secondo prospettive anche specialistiche. Questi luoghi comuni si ripercuotono, com'è naturale, anche in ambito scolastico: quanti studenti si sentono, fin dalla prima infanzia, capaci in italiano "oppure" in matematica, come se le due vie fossero necessariamente antitetiche e incompatibili? Quante famiglie ritengono che esista una genetica indiscutibile delle attitudini, per la quale la propensione di un bambino verso una disciplina assume un carattere assoluto e non modificabile nel corso del tempo? E ancora, quante volte vengono accomunati tratti intrinseci di facilità o

difficoltà alle discipline stesse, contribuendo a una visione che associa solo agli studenti "bravi" la capacità di riuscire in entrambe?
Si tratta di atteggiamenti e convinzioni piuttosto diffusi, che concorrono però al progressivo radicarsi di prospettive discutibili che producono spesso disaffezione degli studenti per l'una o per l'altra area del sapere. Questo è drammatico perché da un lato non aiuta gli studenti ad apprezzare la vera essenza delle materie di studio, rischiando di produrre un allontanamento irreparabile; dall'altro non è neanche rispettoso del fatto che, nell'apprendimento della matematica, l'aspetto linguistico rappresenta un elemento imprescindibile.

Negli ultimi decenni, infatti, numerosi studi e ricerche in ambito internazionale hanno riconosciuto il ruolo centrale della lingua nell'insegnamento e apprendimento della matematica (Duval, 1993, 1995; Laborde, 1985; Morgan, 1998; Pimm, 1987, 1991; Sfard, 1998, 2000, 2001, 2008).
Non sorprende dunque che la ricerca in didattica della matematica, disciplina che si è affermata con forza negli ultimi trent'anni, abbia ormai da tempo evidenziato come le maggiori cause delle difficoltà di apprendimento della matematica da parte degli studenti riguardino le inevitabili interazioni fra lingua comune e disciplina. In particolare, diverse ricerche, condotte sia in ambito internazionale che italofono, hanno focalizzato l'attenzione sulle difficoltà connesse all'acquisizione del linguaggio settoriale[1] della matematica, spesso in attrito con la lingua utilizzata fuori dal contesto scolastico (Bernardi, 2000; D'Amore, 1999, 2000; P. L. Ferrari, 2004, 2021; Laborde, 1995; Maier, 1993, 1995), e su alcuni problemi di comunicazione e di comprensione legati principalmente alla mancata padronanza della lingua comune (D'Aprile et al., 2004; P. L. Ferrari, 2004; Franchini et al., 2017; Sbaragli & Franchini, 2014, 2018). Negli anni queste riflessioni sono giunte anche a livello istituzionale: l'importanza di tener conto della componente linguistica nell'apprendimento della matematica emerge chiaramente nei vari programmi

[1] Il linguaggio delle scienze esatte e naturali è una delle quattro grandi categorie di linguaggi settoriali; oltre a esso ci sono i linguaggi delle attività produttive, dei servizi, e delle scienze umane e sociali (Rovere, 2010).

curricolari internazionali (ad esempio quello americano ispirato a National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), e in particolare in quelli italiani e svizzeri (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012; Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport [DECS], 2015). Insomma, insieme ad altre tematiche importanti, la dimensione linguistica e comunicativa dell'apprendimento della matematica è diventata un tema particolarmente "caldo", perché se non si tiene conto di questi aspetti nell'insegnamento-apprendimento della matematica, i rischi sono alti in termini di difficoltà in ogni compito richiesto dal suo apprendimento e di allontanamento degli allievi dalla disciplina.

La sensazione è che questi studi, uniti a quelli basati sull'idea di educazione linguistica trasversale che i piani di studio di diversi Paesi hanno saputo accogliere, stiano producendo un cambiamento osservabile, non solo a livello di ricerca teorica, ma anche nel modo di concepire e di costruire il sapere in contesto didattico. Nonostante questi elementi di speranza, bisogna ammettere che permangono ancora alcune rigidità, soprattutto negli ordini secondari di scolarità: spesso la matematica è ancora intesa e trasmessa come materia fredda, asettica, e decisamente separata dai piani dell'espressione di sé, della creatività e del sapersi esprimere linguisticamente; altrettanto spesso, invece, il lavoro linguistico è associato ai sentimenti e all'espressività, e a dimensioni emotive piacevoli che non contemplano, almeno a livello ingenuo, profonde strutturazioni logiche. Quello che si può affermare è che si sono fatti dei passi in avanti, sia dal punto di vista della didattica della matematica sia dal punto di vista dell'educazione linguistica, nella percezione della necessità di un approccio nel quale si riconosce l'importanza della lingua nella matematica e del suo apprendimento, e della matematica come ambiente privilegiato (al pari di altre discipline) per lo sviluppo di competenze linguistiche.

La visione promossa in questa dissertazione, che va al di là della singola ricerca, accoglie e sviluppa un certo modo d'intendere il dialogo interdisciplinare e l'impostazione dell'insegnamento e dell'apprendimento. Con l'espressione "dialogo interdisciplinare", infatti, non si intende una lettura che viene da una singola disciplina, richiamando aspetti dell'altra, ma un'effettiva commistione di punti di vista che vengono dai professionisti di entrambe le discipline. Questa commistione non è solo un gioco di equilibrismi tra quadri

teorici e sguardi di analisi, ma piuttosto un insieme di vere e proprie riflessioni e azioni congiunte grazie alle quali si costruisce una prospettiva comune: in questo modo l'approccio interdisciplinare assume caratteristiche proprie, che rappresentano qualcosa di più della somma dei contributi o visioni delle singole discipline.

I materiali su cui si è deciso di attuare queste prospettive di indagine interdisciplinare sono i libri di testo in uso nella scuola. Tale scelta è stata effettuata per diversi motivi. In primo luogo, il libro di testo è ancora oggi un oggetto centrale della pratica didattica degli insegnanti. La stragrande maggioranza dei docenti, infatti, se ne serve abitualmente, utilizzandolo per diversi scopi didattici a differenti livelli: chi lo usa per ripassare contenuti teorici, chi solo per la parte esercitativa, chi ancora lo utilizza come strumento di studio effettivo per gli studenti, o chi lo utilizza come oggetto di trasmissione del sapere su cui riflettere criticamente ecc. Le possibilità sono numerose, e l'insegnante se ne serve come equipaggiamento da cui trarre ogni volta quello di cui ha più bisogno[2]. In secondo luogo, il libro di testo è ancora uno degli attori che "parla" agli allievi della disciplina che stanno apprendendo. Questo dialogo unilaterale presenta caratteristiche tipiche della trasmissione disciplinare, ma anche elementi puntuali che potrebbero non risaltare a una lettura non approfondita; per questo motivo, il libro di testo diventa un oggetto speciale per realizzare un incontro interdisciplinare: in esso la matematica e, in particolare, la lingua con la quale è veicolata, diventano un discorso scientifico rivolto a un uditorio particolare, con tutte le conseguenze comunicative e pragmatiche che ciò può comportare.
Insomma, capire meglio le caratteristiche disciplinari e comunicative del libro di testo si presenta come un terreno di studio proficuo tanto sul piano descrittivo della ricerca in ambito didattico (sia matematico che linguistico), quanto su quello delle possibili ricadute concrete in aula, per aiutare gli insegnanti a operare scelte critiche e porsi interrogativi riguardo alle possibili difficoltà di decodifica e comprensione da parte degli studenti. Il tutto nell'ottica di una profonda sinergia, utile a esaminare con sguardo almeno in parte

[2] Sugli usi dei libri di testo da parte dei docenti italiani e ticinesi si vedano i seguenti due articoli rientranti all'interno del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico*: Canducci et al. (2020) e Sbaragli et al. (2020).

nuovo la questione della natura, del ruolo e delle possibilità del testo di matematica per la scuola.

Il lavoro di ricerca qui presentato si inserisce all'interno del progetto di ricerca del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto n. 176339). Il progetto verrà descritto brevemente nel paragrafo 1.1 della presente introduzione, con il fine di delineare il contesto di sfondo sul quale si è innestato il dottorato. Il paragrafo 1.2 presenterà una sintesi delle tematiche trattate all'interno del dottorato, focalizzandosi in particolare nel descrivere il contenuto degli articoli di ricerca che compongono la presente tesi di natura cumulativa. Questi articoli di ricerca verranno presentati nei capitoli 2, 3, 4, e 5. In particolare, il capitolo 2 presenterà il primo articolo della dissertazione (Articolo 1); il capitolo 3 presenterà il secondo articolo della dissertazione (Articolo 2); il capito 4 presenterà il terzo articolo della dissertazione (Articolo 3); il capitolo 5 presenterà il quarto articolo della dissertazione (Articolo 4). I quattro articoli sono collegati fra loro dal punto di vista dei contenuti dell'indagine, ma separati dall'affrontare tale indagine secondo prospettive differenti. Infine, il capitolo 6 si occuperà di trarre alcune conclusioni a cui si è giunti con tale lavoro di dottorato, e di delineare alcune piste di lavoro future.
Nel complesso, questa dissertazione contribuisce al dialogo interdisciplinare tra la didattica della matematica e gli studi linguistici, evidenziando come una visione congiunta possa fornire significative piste di analisi della testualità dei libri di testo di geometria presenti nel panorama scolastico italofono.

1.1 Il progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico*

Sui presupposti e le riflessioni appena richiamati sono nate, da quasi un decennio, ricerche condotte da alcuni ricercatori afferenti alle aree della didattica della matematica e della didattica della lingua italiana del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana: dal 2012 si sono infatti realizzate diverse esperienze di studio, ricerca e formazione, rivolte a futuri docenti e a docenti in

servizio (Fornara & Sbaragli, 2013; Demartini & Sbaragli, 2015). Il tutto ha preso avvio da un'indagine relativa all'importanza delle competenze lessicali nella risoluzione dei problemi matematici (Fornara & Sbaragli, 2014, 2016; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020) e si è via via consolidato anche attraverso occasioni divulgative (ad esempio il convegno *Questo matrimonio s'ha da fare* del 2015) che hanno nel tempo permesso di unire maggiormente le forze sino a ottenere l'importante finanziamento relativo al progetto di ricerca *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico.*

Il progetto è stato pensato per essere condotto da un gruppo eterogeneo di ricercatori in didattica della matematica, linguistica e computer science e ha approfondito, nel suo insieme, l'analisi di un corpus di 142 libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana per la scuola elementare e media[3], optando in particolare per la parte di geometria e scegliendo come tema i *poligoni*. Dei 142 libri del corpus, chiamato DFA-Italmatica: 129 provengono dal variegato e contesto editoriale italiano; 13 libri dal contesto svizzero, di cui 7 provengono dal Canton Ticino e 6 dal Canton Grigioni. I 129 libri del contesto italiano compongono quello che è stato denominato corpus italiano; i 13 libri del contesto svizzero compongono quello che è stato denominato corpus svizzero, suddiviso a sua volta in sub-corpus ticinese e sub-corpus grigionese. La minore presenza di libri di testo svizzeri è dovuta al fatto che, soprattutto in Canton Ticino, l'utilizzo del libro di testo in ambito didattico non è diffuso[4]. L'intenzione principale è stata di caratterizzare il libro come

[3] Nel capitolo di introduzione e nel capitolo delle conclusioni verranno utilizzate le espressioni *scuola elementare* e *scuola media*, seguendo le diciture adottate in Svizzera. La scuola elementare in Canton Ticino dura 5 anni e corrisponde alla scuola primaria in Italia e ai primi 5 anni di scuola elementare (su 6) nel Canton Grigioni. Sempre in Canton Ticino la scuola media dura quattro anni: per quanto riguarda il confronto con l'Italia, essa corrisponde al triennio di scuola secondaria di primo grado e al primo anno di scuola secondaria di secondo grado; per quanto riguarda il Canton Grigioni, corrisponde al sesto anno di scuola elementare unito al triennio di scuola media. All'interno degli articoli presenti nei capitoli 2, 3, 4, e 5 si troveranno le diverse diciture dei tipi di scuole a seconda del contesto di pubblicazione del contributo.

[4] Per un approfondimento dei criteri con i quali è stato costruito il corpus, si veda Sbaragli e Demartini (a cura di) (2021).

mediatore testuale tra la disciplina e il lettore: in questo senso si è cercato di individuarne le caratteristiche strutturali e compositive, le modalità comunicative tipiche, gli intenti pragmatici e pedagogici, con il fine di identificare anche possibili ostacoli per la comprensione degli allievi. Questi ostacoli infatti non risiedono in uno spazio di imprecisioni o incoerenze esclusivamente intrinseco alla disciplina, ma riguardano anche dimensioni linguistico-comunicative, andando così a comporre un quadro complesso nel quale coesistono elementi di criticità afferenti all'unione dei due domini. Su questa linea di indagine, le analisi condotte contengono spesso prospettive teoriche e metodologiche integrate tra le due discipline: elementi tipici dell'analisi del testo e di didattica della matematica vengono fusi in riflessioni riferite all'imprescindibile dimensione di multimodalità del libro di testo, alla testualità del libro di testo, all'inevitabile rapporto testo verbale e figure, oppure ad analisi di rilievi lessicali specificatamente riferiti a termini ed espressioni matematiche.

Le analisi condotte all'interno del progetto di ricerca si basano in primo luogo sul tentativo di individuare un modello di articolazione della testualità che potesse consentire di far emergere le caratteristiche linguistico-testuali e matematiche del libro di testo di geometria. Il modello di articolazione testuale dei libri scolastici di matematica è stato costruito con il fine di capire il tipo di scelte operate, spesso non così facili da essere intuite, in termini di intenzioni comunicative e di organizzazione del sapere da trasmettere. Il quadro teorico di riferimento è quello della linguistica del testo proposto da A. Ferrari (2014, 2019), adattato allo specifico del testo matematico per la scuola (Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020). In questo quadro il testo viene inteso come composto di unità semantiche organizzate gerarchicamente su tre livelli: i movimenti testuali (macroatti), segmentati in enunciati (microatti), i quali sono a loro volta composti da unità informative. Il movimento testuale è formato da una sequenza di enunciati che costituiscono un'unità dal punto di vista referenziale o dal punto di vista logico. Esso viene segnalato testualmente in modo vario a seconda del genere di testo considerato, ma nel nostro caso i suoi confini sono solitamente individuabili grazie a segmentazioni operate dal testo stesso: titoli e sottotitoli, segnalazioni ed espedienti di tipo grafico quali l'organizzazione

del layout di pagina o l'utilizzo di spaziature e altri segni grafici caratteristici. L'analisi dei libri di testo del corpus ha condotto all'identificazione di movimenti testuali di varia natura, ma che possono principalmente riferirsi agli intenti comunicativi di *far sapere* qualcosa al lettore e *far fare* qualcosa al lettore, corrispondenti a movimenti denominati dal gruppo di ricerca rispettivamente *espositivo-esplicativo* e *direttivo*.

Il movimento testuale espositivo-esplicativo è stato classificato in tre tipi, corrispondenti a differenti realizzazioni dell'intento comunicativo: il tipo *dichiarativo*, dedicato a esporre un contenuto tramite una o più asserzioni; il tipo *narrativo-descrittivo*, nel quale vengono arricchiti concetti matematici attraverso brevi narrazioni, giochi ecc.; infine il tipo *logico-argomentativo*, cioè un macroatto nel quale le informazioni vengono fornite in modo da accompagnare il lettore nella costruzione e nella comprensione di concetti e relazioni tra concetti, attivando prove di varia natura.

Di questo particolare movimento testuale, poi, sono state individuate tre modalità diverse in funzione di diversi stili comunicativi: il movimento *logico-argomentativo con la modalità di far "fare"*, nel quale la prova è condotta attraverso un'interazione attiva con il lettore, il quale deve realizzare azioni di varia natura; il movimento *logico-argomentativo con la modalità di far "immaginare"*, nel quale le prove vengono proposte al lettore stimolandolo a immaginare azioni da realizzare su rappresentazioni di oggetti geometrici; infine il movimento *logico-argomentativo con la modalità di far "astrarre"*, che propone prove di tipo concettuale, tipiche della disciplina, caratterizzate da un coinvolgimento con il lettore poco stimolato.

Di seguito si mostra la Tabella 1 tratta da Demartini, Sbaragli & Ferrari (2020, p. 165) che schematizza la classificazione dei movimenti testuali individuati.

Movimenti Testuali	**Funzioni**	**Tipi**	**Modalità**
Espositivo-esplicativo	far sapere	1. Dichiarativo	*Esporre*
		2. Logico-argomentativo	*Fare*
			Immaginare
			Astrarre
		3. Narrativo-descrittivo	*Approfondire*

Direttivo	far fare		*Applicare*

Tab. 1 – La classificazione dei movimenti testuali tipici del testo scolastico di matematica.

Come affermato poco sopra, i movimenti testuali sono composti di enunciati. A livello linguistico, l'enunciato è un'unità testuale che si caratterizza per una funzione comunicativa (far sapere, far fare ecc.) e per una funzione di composizione testuale (tematizzare, motivare, specificare, riformulare ecc.). La demarcazione standard dei confini dell'enunciato è solitamente data dall'interpunzione, in particolare dalle pause forti. Nell'impostazione di ricerca adottata all'interno del progetto *Italmatica*, però, viene utilizzata l'espressione enunciato cercando di calarne le caratteristiche all'interno di una visione che tiene in conto il valore matematico che assumono. In effetti, in un manuale scolastico di geometria sono presenti numerosi enunciati che hanno peculiarità disciplinari e funzioni di composizione testuale diverse. Per analizzare nel dettaglio i testi, si è scelto di categorizzarli in cinque tipi distinti: *definizione*, *proposizione*, *denominazione*, *esemplificazione* e *notazione*:

- l'enunciato di tipo *definizione* è un enunciato nel quale si individua il significato di una espressione verbale attraverso una frase formata da elementi in cui il significato è già noto. In altre parole, tale enunciato fa esplicito riferimento alla definizione intesa in puro senso aristotelico. *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* («la definizione si esegue aggiungendo al genere prossimo la differenza che lo specifica», Aristotele, 1996).
- L'enunciato del tipo *proposizione* è un enunciato all'interno del quale vengono descritte proprietà o relazioni tra enti o oggetti geometrici; in una proposizione è sempre possibile identificare i riferimenti a ciò di cui si parla e stabilire il suo valore di verità;

- L'enunciato di tipo *denominazione* è un enunciato in cui viene assegnato un nome allo scopo di identificare l'oggetto matematico in questione;[5]
- L'enunciato del tipo *esemplificazione* è un enunciato che descrive «ogni situazione in cui qualcosa di specifico è offerto come rappresentante di una classe generale con la quale lo studente deve familiarizzare» (Watson & Mason, 2006, p. 3);
- L'enunciato di tipo *notazione* è un enunciato che comunica al lettore come si designa qualcosa dal punto di vista dei simboli e dei segni rientranti nell'uso comune della matematica.

Queste categorie di microatti non esauriscono tutte le possibilità presenti in un libro scolastico di matematica, ma coincidono con i tipi di enunciati più caratterizzanti.
La scelta di considerare il valore matematico degli enunciati ha portato ad allargare i confini dei microatti considerati come enunciati in senso linguistico, per cui non vi è sempre corrispondenza uno a uno tra enunciato in senso strettamente linguistico ed enunciato inteso in senso matematico: spesso i microatti coincidono con singoli enunciati, ma possono anche riferirsi a un insieme di due o più enunciati che, anche se formalmente separati da pause forti, sono inscindibili a livello di unità comunicativa.

L'individuazione di questo modello di analisi ha consentito di procedere a una mappatura di tutti i testi del corpus, nella quale si sono annotati i macroatti e i microatti sopra esposti. Le fasi di mappatura e annotazione hanno coinvolto diverse attività di elaborazione manuale e informatica: come prima cosa si è proceduto alla scansione in formato pdf delle parti di interesse dei libri (raccolti in forma cartacea); queste scansioni sono poi state trasformate in formato txt dapprima attraverso il software OCR ABBYY di riconoscimento automatico, e in seguito controllate manualmente; i testi in formato txt sono poi stati importati all'interno del software UAM corpus tool, grazie al quale si è proceduto all'annotazione secondo l'impostazione qui presentata. Da questa mappatura sono stati estrapolate strutture di dati in formato XML, che sono state interrogate attraverso

[5] Spesso nei libri di testo di matematica la denominazione non è un microatto autonomo, ma avviene nell'ambito di una definizione o di una proposizione, al fine di fornire termini di riferimento specifici della disciplina.

elaborazioni informatiche appositamente costruite. I dati emersi hanno permesso di entrare all'interno dell'organizzazione strutturale del libro, studiando la presenza quantitativa dei macro e micro atti, la distribuzione negli anni di scolarità, ma anche esaminare singoli tipi di atti. Queste analisi sono presentate all'interno del volume *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica* (Sbaragli & Demartini, 2021), al quale hanno collaborato tutte le ricercatrici e tutti i ricercatori che hanno fatto parte del progetto, di seguito elencati.

Equipe di progetto. Silvia Sbaragli (responsabile di progetto), Elena Franchini, Michele Canducci, Amos Cattaneo, afferenti al Centro competenze didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana; Silvia Demartini, Simone Fornara, Luca Cignetti, afferenti al Centro competenze didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione del Dipartimento formazione e apprendimento della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana.
Partner di progetto. Angela Ferrari dell'Istituto di Italianistica dell'Università di Basilea; Pier Luigi Ferrari del Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica dell'Università del Piemonte Orientale; Daniele Puccinelli del Dipartimento tecnologie innovative della Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana; Andrea Rocci dell'Istituto di argomentazione, linguistica e semiotica dell'Università della Svizzera Italiana; Matteo Viale del Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica dell'Università di Bologna.

Nel prossimo paragrafo verrà presentata nello specifico la ricerca condotta all'interno del dottorato, chiarendo le connessioni e le peculiarità rispetto al contesto generale del progetto *Italmatica* nel quale si è inserito.

1.2 Il dottorato

Data la sua natura fortemente interdisciplinare, nel progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico* era prevista la figura di un dottorando di formazione matematica che potesse svolgere una ricerca interdisciplinare focalizzata sui libri del corpus. Formalmente, questa esigenza ha preso corpo nella figura del sottoscritto, inserita da un lato all'interno del Centro competenze

didattica della matematica del DFA, dall'altro iscritto al corso dottorale della Facoltà di scienze della comunicazione dell'Università della Svizzera italiana. Questa duplice collocazione ha consentito di intraprendere un percorso di ricerca fortemente interdisciplinare, nel quale si è potuto collaborare a tutte le fasi del progetto, a partire da quella iniziale di raccolta dei libri del corpus fino a quella finale di analisi degli stessi, passando per il trattamento informatico dei testi e le attività di annotazione. All'interno di questo panorama, si è focalizzata l'attenzione su alcune linee di ricerca originali che potessero rientrare in modo specifico nel dottorato: tali tematiche hanno riguardato il tema della *testualità* dei libri di geometria. Dal punto di vista etimologico, il termine deriva dal latino *textus* (da cui *testo*), la cui area semantica richiama l'idea di un qualcosa tenuto insieme da un ordito e una trama; in quest'ottica, un testo può essere visto come «una sequenza di segni linguistici che, proprio in virtù della sua tessitura, può funzionare come un'unità comunicativa e rapportarsi con il contesto globalmente» (Rocci, 2003, p. 259). A partire da questa caratterizzazione, la testualità viene intesa come la proprietà di essere un testo; si tratta cioè di un dominio complesso e articolato, composto da fattori eterogenei (sociali, psicocognitivi culturali, grammaticali, linguistici ecc.) che «concerne i modi in cui le unità del discorso si intrecciano sia dal punto di vista del significato che da quello della forma linguistica» (Ferrari, A., 2014, p. 35).

Nella ricerca qui presentata, in primo luogo si è guardato al libro di testo nella sua dimensione intrinsecamente multimodale, focalizzando l'attenzione su alcune componenti semiotiche utilizzate per favorire un processo cognitivo fondamentale per l'apprendimento in matematica, denominato da Duval (1993) *conversione semiotica*. Con questa espressione si intende il processo cognitivo con il quale si può riconoscere lo stesso oggetto matematico individuato da rappresentazioni semiotiche afferenti a registri semiotici differenti. Questo tipo di analisi ha consentito di guardare al libro di testo come oggetto globalmente costituito non solo da componenti linguistiche, ma anche figurali e grafiche. I risultati di queste analisi sono discussi nell'Articolo 1 (riportato nel capitolo 2).

In secondo luogo, si è guardato al libro di testo focalizzandosi in modo specifico sui movimenti testuali di tipo logico-argomentativo individuati grazie alle fasi di mappatura e annotazione dei testi. Questo sguardo ha consentito cioè di puntare l'attenzione su una

componente caratterizzante del libro di testo di matematica, quella in cui si presentano al lettore prove e argomenti utili a convincere della validità di risultati matematici nuovi. Questa tipologia di indagine rappresenta un livello intermedio, all'interno del quale hanno preso corpo riflessioni riferite all'efficacia comunicativa dei testi dal punto di vista matematico e linguistico-argomentativo, considerando anche le componenti multimodali del testo. Le analisi condotte e i risultati raggiunti su questo livello della ricerca sono presentati nell'Articolo 2 (riportato nel capitolo 3), nel quale si caratterizzano e indagano le modalità testuali di realizzazione dei movimenti logico-argomentativi, e nell'Articolo 3 (riportato nel capitolo 4), nel quale ci si focalizza sulla dimensione dialettica e retorica di alcuni movimenti logico-argomentativi.

In ultimo, si è guardato al libro di testo negli aspetti grammaticali dell'interfaccia lingua-testo, focalizzandosi in modo specifico sulla categoria di *numero* in alcuni enunciati di tipo *definizione* individuati nelle fasi di mappatura e annotazione dei testi. Questo sguardo ha consentito di puntare l'attenzione su aspetti strettamente lessicali, legati alle scelte di realizzazione del singolare-plurale operate dai libri di testo su un particolare argomento: gli enti dei poligoni. Questa tipologia di indagine rappresenta un livello microscopico, all'interno del quale hanno trovato spazio riflessioni sul rapporto fra la superficie linguistica e la realtà extra-testuale, in questo caso matematica, cui il libro di testo si riferisce. Le analisi condotte su questo livello della ricerca sono presentate nell'Articolo 4 (riportato nel capitolo 5).

Nei tre paragrafi che seguono verranno approfonditi i tre livelli di analisi appena richiamati, presentando nel contempo una sintesi degli articoli a essi riferiti.

1.2.1 La dimensione multimodale del libro di testo di geometria

La dimensione multimodale del libro di testo di geometria è approfondita nell'Articolo 1 della presente dissertazione.

Il contributo in primo luogo considera che la produzione di un testo scolastico coinvolge diverse figure: autori, redattori, grafici, illustratori ecc., che cooperano fra loro al fine di costruire un testo che globalmente può essere ascritto al tipo *espositivo-esplicativo* (A.

Ferrari, 2019)[6]. L'insieme delle figure professionali che lavorano a un testo scolastico diventa a tutti gli effetti *costruttore di significato* (Bezemer & Kress, 2010) del testo, perché ciascuna di queste figure opera sul testo secondo concezioni e professionalità proprie. Stando così le cose, occorre ammettere che la maggiore o minore efficacia delle informazioni veicolate dipende dunque anche dal livello di coerenza globale che questi costruttori di significato riescono a concretizzare nell'armonizzare fra loro aspetti testuali, grafici, di impaginazione ecc. Guardare a tutti questi aspetti insieme è un'operazione complessa, che coinvolge nel nostro caso certamente competenze matematiche, ma anche linguistiche e di interpretazione di scelte grafiche.

Partendo da questi presupposti, l'Articolo 1 ha l'obiettivo di guardare al libro di testo tenendo conto di questi elementi di complessità, grazie a un approccio multimodale di analisi delle modalità con le quali viene incentivato il processo cognitivo di conversione semiotica tra registro discorsivo multifunzionale della lingua naturale e il registro non discorsivo multifunzionale di tipo figurale (Duval, 2006a, 2006b, 2017).[7]

Dopo aver richiamato alcuni elementi costitutivi dell'approccio di Duval, nel quale l'apprendimento della matematica è affrontato nelle sue dimensioni semiotiche e cognitive, viene introdotto dal punto di vista teorico il tema della multimodalità, andando a discutere la letteratura di ricerca pertinente e focalizzando l'attenzione sul rapporto

---

[6] Per i tipi di testo si considera come riferimento la tipologia funzionale di Werlich (1975) − sintetizzata, insieme ad altre, in Lala (2011) –, che li classifica in *narrativo*, *descrittivo*, *argomentativo*, *informativo*, *regolativo* (si vedano anche Mortara Garavelli, 1988 e Lavinio, 2000). Tali tipi si realizzano in generi testuali più o meno vincolanti da punto di vista interpretativo: il testo scolastico si configura come un testo mediamente vincolante, pensato per spiegare a chi non sa.

[7] Per Duval, i registri semiotici sono suddivisi in registri discorsivi e registri non discorsivi, a loro volta categorizzabili in multifunzionali e monofunzionali. I registri discorsivi presentano una struttura simile a quella delle lingue naturali e rendono possibili le operazioni di enunciazione di qualcosa, di designazione ed espansione discorsiva; i registri non discorsivi non godono di questa struttura. Inoltre, se i registri monofunzionali sono specifici della matematica, perché in essi è possibile che le manipolazioni assumano forma di algoritmo, i registri multifunzionali sono utilizzati anche al di fuori della matematica, e svolgono principalmente funzioni di comunicazione o di oggettivazione. Il tema è trattato in dettaglio nell'Articolo 1.

possibile tra analisi multimodale dei testi e didattica della matematica. Riferendosi in particolare ai lavori di Bateman (2008) e di Bateman e Wildfeuer (2014), viene richiamata l'attenzione sul concetto di *relazione discorsiva multimodale*, intesa come relazione retorica presente nei testi multimodali, la cui funzione può essere di connettere due rappresentazioni dello stesso contenuto espresse in registri semiotici diversi. All'interno di un libro di testo scolastico, queste relazioni si manifestano attraverso, ad esempio, la scelta di utilizzare diversi segni grafici che hanno la funzione di connettori, come ad esempio frecce e colore, ma anche attraverso precise scelte di organizzazione del layout di pagina e di disposizione dei contenuti al suo interno. Nel caso dei libri di testo di geometria, tali strategie e risorse semiotiche possono dunque essere interpretate come "inviti" alla conversione semiotica, rappresentando in questo modo un ponte tra la didattica della matematica e l'analisi multimodale dei testi.

Una volta approfondite queste riflessioni, nell'Articolo vengono rilevate tre categorie di risorse e strategie semiotiche che manifestano relazioni discorsive multimodali di tipo riformulativo: uso del colore con funzioni di similarità; prossimità degli elementi nel layout di pagina; segnalazione grafica attraverso linee orientate. L'analisi che segue coinvolge esclusivamente la parte introduttiva dell'argomento poligoni di alcuni libri di testo del corpus: in particolare, l'analisi si è concentrata sulle porzioni di alcuni libri di scuola elementare italiana in cui vengono solitamente definiti e raffigurati gli elementi dei poligoni: vertici, lati, diagonali, angoli ecc. L'analisi condotta è di tipo qualitativo: non vengono effettuati rilievi quantitativi riferiti al corpus DFA-Italmatica né a sub-corpora specifici. Nei casi analizzati, viene ipotizzato che l'uso delle risorse e strategie multimodali individuate possa favorire o ostacolare il processo cognitivo di conversione semiotica tra registro della lingua naturale e registro figurale, a seconda di come queste risorse e strategie vengono attuate dal libro di testo (se vengono attuate).

1.2.2 La dimensione argomentativa del libro di testo di geometria

La dimensione argomentativa del libro di testo di geometria viene approfondita nell'Articolo 2 e nell'Articolo 3 della presente dissertazione. I due articoli si focalizzano sui movimenti testuali logico-argomentativi, secondo obiettivi e prospettive teoriche

differenti. Questi verranno evidenziati nei prossimi due paragrafi, che rappresentano una sintesi dei due contributi.

1.2.2.1 Modalità dei movimenti logico-argomentativi: un'analisi qualitativa e quantitativa

L'Articolo 2 analizza i movimenti *logico-argomentativi* di tutti i 142 libri di testo del corpus DFA-Italmatica, componendo così un sub-corpus formato da 1437 porzioni testuali (di cui 1383 riferite a libri del contesto italiano, 54 riferite al contesto svizzero). L'obiettivo è di delinearne le caratteristiche qualitative, le modalità di realizzazione a livello disciplinare e linguistico, la presenza nei manuali del corpus a livello quantitativo e l'evoluzione nel corso degli anni di scolarità. L'indagine è di natura strettamente interdisciplinare fra matematica e linguistica, con una prospettiva comune di tipo didattico. Il tema dell'argomentazione è stato inquadrato cercando di mettere in evidenza alcuni risvolti che questo ambito di studio ha avuto nella storia del pensiero. Questo tentativo ha condotto gli autori a posizionare le riflessioni sui movimenti testuali logico-argomentativi rispetto alle moderne *teorie dell'argomentazione* (Perelman & Olbrecths-Tyteca, 1958/2013; Toulmin, 1958/1975), e rispetto agli studi di didattica della matematica che si sono occupati di definire le caratteristiche e i confini delle argomentazioni in matematica (principalmente Duval, 1998). Nell'indagare poi le modalità con le quali i movimenti logico-argomentativi possono essere presentati al lettore di un libro di testo di geometria, è emerso come tali modalità fossero in linea con una visione dell'evoluzione storica della disciplina, che dalle origini ad oggi ha vissuto un continuo e progressivo passaggio dal mondo concreto al mondo astratto, ma anche con alcune considerazioni legate all'esigenza, nell'apprendimento della matematica, di agire concretamente, di manipolare oggetti, per poi giungere successivamente all'astratto. A partire da queste premesse sono state lette in profondità le tre modalità di movimento logico-argomentativi, individuate in fase di costruzione del modello testuale di analisi del libro di geometria: movimento logico-argomentativo con modalità di far "fare", di far "immaginare" e di far "astrarre". Questa lettura si è basata principalmente sull'interpretazione di alcuni esempi, tratti dai libri del corpus, realizzata attraverso le distinzioni introdotte da Balacheff (1987, 1988,

2001) nell'affrontare il tema della prova in matematica; in particolare, è risultato interessante leggere i movimenti testuali logico-argomentativi in termini di passaggio dalle prove pragmatiche, tipicamente legate alla manipolazioni di oggetti e di rappresentazioni di oggetti, alle prove intellettuali, staccate dai sensi e dalla manipolazione concreta. Le distinzioni si sono dunque rivelate particolarmente efficaci nel nostro contesto, anche perché richiamano al loro interno tanto le dimensioni intrinsecamente presenti nella disciplina, quanto alcune riflessioni di tipo linguistico (facendo riferimento, ad esempio, a quello che viene definito *linguaggio della familiarità*), che sono state integrate con altre dimensioni lessicali quali l'analisi dell'uso di connettivi combinatori, organizzativi e argomentativi (secondo la distinzione proposta in Duval, 1998). Dopo aver chiarito tipologicamente le modalità di movimenti logico-argomentativi, viene esposta un'analisi quantitativa della presenza e distribuzione nel corpus delle tre modalità di movimenti logico-argomentativi, traendo da questa diverse conclusioni.

1.2.2.2 Le lenti dell'inventio, dispositio ed elocutio per guardare alle argomentazioni matematiche

L'Articolo 3 ha l'obiettivo di condurre un passo ulteriore nell'approfondimento interdisciplinare delle argomentazioni presenti nei libri di testo di geometria, proponendo un'analisi realizzata attraverso le categorie retoriche dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio*. In particolare, ci si è chiesto se l'utilizzo di tali lenti per analizzare porzioni argomentative presenti nei libri di testo potesse mettere in risalto aspetti significativi per la didattica della matematica, ma che solitamente non emergono attraverso altri tipi di analisi condotte abitualmente in questo settore di ricerca. Ciò viene fatto focalizzando l'attenzione su movimenti logico-argomentativi che accompagnano il lettore a riconoscere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n\text{-}2) \cdot 180°$; in questo modo si è potuto comporre un'unità di analisi formata da 23 porzioni testuali, provenienti dal corpus italiano e svizzero, e riferiti a libri di testo di quinta elementare, prima media e seconda media.

Nell'Articolo viene dapprima analizzato un caso studio, esponendo i motivi che hanno condotto a considerare questo tipo di porzioni di testo come argomentazioni, e non come

dimostrazioni. Tali motivi riguardano sostanzialmente la constatazione che al loro interno siano presenti passaggi inferenziali diversi: non solo deduttivi, come richiederebbe una dimostrazione matematica (Balacheff, 2001), ma anche induttivi. Interpretare queste porzioni di testo come argomentazioni, in particolare come argomentazioni non dimostrative, legittima la presa in considerazione di categorie di analisi di tipo retorico quali sono l'*inventio* (ovvero il reperimento degli argomenti), la *dispositio* (l'organizzazione del discorso argomentativo) e l'*elocutio* (la forma linguistica del discorso), che oggi rientrano all'interno degli studi di *teoria dell'argomentazione*[8]. Vengono quindi inquadrate alcune delle caratteristiche di queste categorie di analisi, mettendosi, vista l'ampiezza del tema, in una prospettiva sincronica e diacronica che ha consentito di intrecciare tra loro le riflessioni degli studi classici di retorica (riferite principalmente al lavoro di Aristotele) con quelle relative ai moderni studi di teoria dell'argomentazione. Le caratteristiche individuate vengono poi applicate al caso di studio, di cui viene fornito un commento approfondito rispetto alle categorie di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, mostrando così come queste tre lenti non solo siano effettivamente applicabili a contesti di argomentazioni matematiche, ma rappresentino anche strumenti importanti per rendere conto di una complessità che non è evidente a una lettura limitata agli aspetti matematici, tipica delle riflessioni in didattica della matematica. In ultimo, viene messa in evidenza la varietà di scelte possibili in termini di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, attraverso l'analisi di due ulteriori esempi di porzioni argomentative in cui viene trattato lo stesso tema presente nel caso di studio; questo ha permesso al contempo di sottolineare come le diverse scelte legate al tipo di argomenti proposti (l'*inventio*), al modo con il quale si struttura l'argomentazione (la *dispositio*) e alla forma linguistico-testuale che viene adottata (l'*elocutio*) possano influire sull'efficacia comunicativa nei confronti del lettore-studente.

[8] Si sono in particolare presi in considerazione studi di riferimento ormai classici (ad esempio il già citato *Trattato dell'argomentazione* di Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1958/2013) e moderni (Rigotti & Greco, 2019; Rocci, 2017; Rocci & Pollaroli, 2018; van Eemeren, 2015).

1.2.3 La dimensione grammaticale del libro di testo di geometria

L'Articolo 4 si focalizza sugli aspetti grammaticali dell'interfaccia lingua-testo del libro di testo di geometria, in particolare su un aspetto linguistico che si colloca a livello della morfosintassi o microsintassi: l'intento è di mettere in evidenza come le disomogeneità nella realizzazione linguistica della categoria grammaticale del *numero*, cioè del singolare e del plurale, possano produrre una mancanza di aderenza rispetto al sapere geometrico in gioco, e dunque creare eventuali ostacoli per il lettore-allievo.

Per fare ciò, si è scelto di considerare le parti introduttive dell'argomento poligoni dei libri di testo della scuola elementare e media italiana del corpus, già in parte analizzate rispetto alla dimensione multimodale nell'Articolo 1. Si ricorda che in tali parti vengono solitamente definiti gli elementi dei poligoni: vertici, lati, diagonali ecc.; si è poi scelto di non occuparsi della componente figurale che solitamente accompagna il contenuto matematico in oggetto di analisi, focalizzandosi quindi esclusivamente sulla componente lessicale e sintattica. Queste scelte hanno portato alla definizione di un sub-corpus composto da 79 porzioni di manuali scolastici, dalla terza elementare alla prima media.

Prima di condurre l'analisi, ci si è soffermati su alcune considerazioni teoriche. In primo luogo, c'è da dire che un libro di testo di matematica possiede inevitabilmente caratteristiche dovute alla disciplina trattata e in particolare al suo linguaggio specialistico. Queste caratteristiche fondamentali del linguaggio specialistico della matematica, in parte condivise da altri linguaggi specialistici (Cortelazzo, 2011; Gotti, 2005; Gualdo & Telve, 2011) sono l'universalità, la precisione, la concisione e l'astrattezza. Esse rendono tutt'altro che banali l'interpretazione e la comprensione di un testo da parte di chi sta apprendendo, perché si tratta di mettere in conto un costo cognitivo non indipendente che porta con sé difficoltà ampiamente documentate (D'Amore, 1999, 2000; Demartini, P. L. Ferrari, 2021; Fornara & Sbaragli, 2013, 2020; Franchini et al., 2017; Laborde, 1995; Maier, 1993; Sbaragli & Franchini, 2018). Dati questi elementi di complessità intrinseca, diventa importante cercare di non appesantire la trattazione linguistica della disciplina, cercando ad esempio di essere uniformi nelle scelte lessicali e morfosintattiche operate nella stesura di un libro di testo di matematica. Questo diventa ancora più rilevante nelle *definizioni*, che sono un microatto linguistico ampiamente utilizzato in ambito matematico

e rappresentano uno dei formati testuali in cui le caratteristiche del linguaggio della matematica si presentano con maggiore evidenza. Dopo aver richiamato le caratteristiche della categoria grammaticale di *numero* nella lingua italiana, e ripreso le risorse linguistiche che ne identificano la presenza dal punto di vista morfologico e dal punto di vista dei quantificatori, vengono definite le categorie di analisi linguistica e matematica con le quali viene condotto lo studio: l'*omogeneità/disomogeneità* delle scelte linguistiche, e l'*aderenza forma-contenuto*. Con *omogeneità* ci si riferisce alla tendenza a ripetere certe parole e certe strutture della lingua, ed è distinta dalla *disomogeneità*, che invece rappresenta la tendenza opposta a variarle attraverso il ricorso a pseudo-sinonimie e a diverse opzioni sintattiche. Con *aderenza forma-contenuto* si intende invece il risultato concreto della trasposizione linguistica del contenuto matematico: un testo è aderente al contenuto se vi è una rispondenza globale precisa alla realtà extra-testuale (nel nostro caso matematica) cui si riferisce. Dopo aver chiarito questi aspetti, nell'Articolo vengono discussi diversi esempi tratti dai libri di testo, andando a identificare varie situazioni e tipologie di omogeneità e di disomogeneità di *numero* che corrispondono a situazioni di aderenza o non aderenza al contenuto matematico, e viene condotta un'analisi quantitativa della loro presenza nel sub-corpus identificato.

1.2.4 Prospetto sintetico degli articoli della tesi

A conclusione dell'introduzione, può essere utile presentare un prospetto di sintesi riguardante alcuni aspetti degli articoli che compongono il corpo della tesi. La Tabella 2 fornisce diverse informazioni: titolo, lingua di pubblicazione, autori, tipologia di analisi, unità di analisi considerate, rivista a cui si è presentato il contributo, conferenze in cui si è presentato il tema, e stato dell'articolo (pubblicato, accettato, sottomesso).

	Articolo 1 (Capitolo 2)	**Articolo 2 (Capitolo 3)**	**Articolo 3 (Capitolo 4)**	**Articolo 4 (Capitolo 5)**
Titolo	The influence of multimodal textualization in	Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare	*Inventio, dispositio, elocutio*: tre lenti per l'analisi di argomentazioni nei	Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della

	the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks.	e media in lingua italiana.	libri di testo di geometria.	scuola primaria e secondaria di primo grado italiani.
Lingua	Inglese	Italiano	Italiano	Italiano
Autori	Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S.	Sbaragli, S., Canducci, M., & Demartini, S.	Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S.	Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S.
Tipologia di analisi	Qualitativa.	Qualitativa e quantitativa.	Qualitativa e quantitativa.	Qualitativa e quantitativa.
Corpora analizzati	Corpus italiano: alcune porzioni testuali in cui vengono definiti gli elementi del poligono.	Corpus DFA-Italmatica: 1437 porzioni testuali annotate come movimenti logico-argomentativi.	Corpus DFA-Italmatica: 23 porzioni testuali in cui viene proposta un'argomentazione volta a riconoscere che la somma delle ampiezze di un poligono di *n* lati è pari a (*n*-2) ·180°.	Corpus italiano: 79 porzioni testuali in cui vengono definiti gli elementi del poligono.
Rivista	*Multimodal Communication*.	*Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula.*	*La matematica e la sua didattica*.	*Italiano a scuola*.
Conferenze	Incontri con la Matematica XXXIII, Castel San Pietro Terme (BO), 8-10 novembre 2019.		Italmatica per tutti. Dalla ricerca alle ricadute in aula, Locarno, 15-16 ottobre 2021.	Incontri con la Matematica XXXIV, Castel San Pietro Terme (BO), 6-8 novembre 2020.
Stato dell'articolo	Pubblicato: giugno 2021.	Pubblicato: maggio 2021.	Da sottomettere.	Pubblicato: luglio 2021.

Tab. 2 – Prospetto degli articoli di ricerca interni alla dissertazione.

Capitolo 2. The influence of multimodal textualization in the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks

Michele Canducci*, Andrea Rocci and Silvia Sbaragli

https://doi.org/10.1515/mc-2020-0015

Received May 19, 2020; accepted January 5, 2021; published online ▪▪▪

Abstract: Starting from the corpus of the Swiss National Science Foundation (FNS) project Italmatica. Under- standing Mathematics at school, between common language and specialized language (Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico), an analysis of some examples taken from geometry textbooks used in the Italian primary school is presented. The analysis is based on the application of two intertwined theoretical frameworks: Duval's semio-cognitive approach, which addresses problems related to mathematics education, and a linguistic approach to multimodal discourse analysis inspired by Bateman. The analysis shows how certain semiotic resources used as rhetorical devices for paraphrastic reformulation (restatement) can support or hinder the semiotic conversion of representations associated with two different semiotic registers (figural and natural language) in print documents with a strong multimodality component.

Keywords: geometry textbooks; interdisciplinary analysis; multimodal discourse analysis; semiotic conversion; text-figure interaction

***Corresponding author: Michele Canducci**, Department of Education and Learning, University of Applied Sciences and Arts of Southern Switzerland, Locarno, TI, Switzerland; and Faculty of Communication, Culture and Society, Università della Svizzera italiana, Lugano, TI, Switzerland, E-mail: michele.canducci@supsi.ch. https://orcid.org/0000-0003-3116-9530

Andrea Rocci, Institute of Argumentation, Linguistics and Semiotics, Faculty of Communication, Culture and Society Università della Svizzera italiana, Lugano, TI, Switzerland, E-mail: andrea.rocci@usi.ch. https://orcid.org/0000-0001-7156-5402

Silvia Sbaragli, Department of Education and Learning, University of Applied Sciences and Arts of Southern Switzerland, Locarno, TI, Switzerland, E-mail: silvia.sbaragli@supsi.ch. https://orcid.org/0000-0002-1071-3886

2.1 Introduction

The theme we deal with in this paper is part of the project I*talmatica. Understanding mathematics at school, between common language and specialized language* (*Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, tra lingua comune e linguaggio specialistico*)[9]. The *Italmatica* project aims to identify, collect and analyse, both from a linguistic and a mathematical point of view, a corpus of primary and middle school Math textbooks written in Italian,[10] in order to outline features and possible obstacles to pupils' understanding.

Like most school textbooks, mathematics textbooks recommended for primary and secondary schools are compendia designed to enclose and transmit knowledge to pupils. Although these manuals are generally considered "explicative" texts (Ferrari, A., 2019, p. 78), in reality they are hybrid texts (Viale, 2016), with various formats and communicative purposes in which different representative registers coexist.

We have focused our attention on geometry and specifically on polygons, in a perspective of continuity from primary to secondary school since the topic of polygons is addressed multiple times in compulsory school, in accordance with the idea of a spiral construction of mathematical skills whereby certain topics presented to the students in the first years of school are then progressively consolidated and deepened in the following years.

Geometry is a mathematics field with a particular feature: its objects are entities that possess both conceptual and figural properties. Fishbein defines these objects as figural

[9] The Swiss National Science Foundation is a Swiss independent organisation that aims evaluating and financing research proposal. Italmatica project is a three-year Div. I-III funding scheme project (n. 176339) started on 1.09.2018, and involves several partners among Italy and Canton of Ticino (Switzerland).

[10] In Europe, Italian is used as a national language in Italy, Canton of Ticino (Switzerland) and Canton of Grisons (Switzerland), in San Marino, in Vatican City, in four municipalities in Slovenia and in the Istrian region of Croatia.

concepts pointing out that they are “abstract, general, ideal, pure, logically determinable entities, though they still reflect and manipulate mentally representations of spatial properties (like shape, position, metrically expressed magnitudes)” (Fischbein, 1993, p. 160). Being able to coordinate and harmonize these two aspects – general and ideal on the one hand, particular and perceptive on the other – is a complex challenge, but from an educational point of view it is nevertheless necessary to promote the acquisition of concepts (Sbaragli, 2006). That said, it is evident that a geometry textbook contains representations that influence the learning of concepts, involving both the conceptual and the figural component. In this sense, the specific features of the representations that convey information significantly influence the way in which a reader learns concepts, and this is particularly true of the different semiotic representations used to present a certain concept; but this is not enough for interpreting what a text tries to convey.

In this context it is not sufficient to analyse the verbal text, nor simply considering the coupling of the verbal text with the figural geometric representations as other types of information should be considered and interpreted, which are equally relevant to the reader and are conveyed through semiotic resources and strategies such as choices of page layout, use of colours and typographical elements like arrows and lines. These choices affect, for example, the intersemiotic translation between two representations of the same mathematical object, which is a fundamental aspect in mathematics education. The assumption here is that the producers of meaning are not only the authors of the text, but also all those who cooperate in its production (editors, graphic designers, illustrators, etc.). Now, since each of them highlights, selects, organizes the different aspects according to their own conception and expertise, the team of professionals working on a school textbook in fact acts as a meaning- maker (Bezemer & Kress, 2010). Indeed, Kress’ socio-semiotic approach to the text «ascribes meaning to all modes of communication, including image, writing, typography and layout; and it treats signs of any kind as reflecting the interests of the makers of these signs» (Bezemer & Kress, 2010, p. 13).

However, the result of the collective work of meaning-makers with diverse expertise on a textbook may sometimes appears disharmonious: in some cases, a certain mode of

semiotic, typographical and layout arrangement may favour or hinder the learning of any given concept.

A question that arises here is whether literature in the field of multimodality can be combined with the interpretation of Raymond Duval's semio-cognitive approach assumed for mathematics teaching and applied in this context to the articulation of meaning in geometry textbooks, with the aim of characterising more and less coherent productions. Thus, in the paper we will provide an initial answer to this question by applying to a set of examples from the Italmatica corpus a strategy of analysis drawing on Duval's approach as implemented in mathematics teaching in the past 30 years (1993, 2017) and on recent research in multimodal discourse analysis (Bateman, 2008; Jewitt et al., 2016).

2.2 Theoretical framework

2.2.1 The semio-cognitive approach

The nature of mathematical objects has been, and still is, debated in the philosophical, historical, epistemological fields, and more recently also in mathematical education (D'Amore et al., 2017; Godino & Batanero, 1998; Thompson & Sfard, 1994). Ernest (1991), for example, states that despite what has been believed for two millennia, mathematics is not a set of objective truths, but «is fallible, changing, and like any other body of knowledge, the product of human inventiveness». Balacheff (2008) is also on this line of thought, but focuses on the non-physical nature of mathematical objects, arguing how this is the reason for the importance, in mathematical practices, of natural language. Without going into detail, suffice it to recall that there are two main currents to which the various meanings can be traced, namely: the realist current, which sees in the mathematical object something real that exists independently of human beings and their activity, on the one hand; the pragmatist current, which considers the human action predominant in defining uses, signs and practices, on the other. Independently of the diverse philosophical meanings, one thing is clear: unlike other sciences, in which the object of knowledge can be directly manipulated in a more or less tangible way, «unlike the objects commonly called 'real' or 'physical', the objects of mathematics are not directly accessible through

perception, or through an immediate intuitive experience»[11] (Duval, 1993, p. 38). Sfard (1991) also shares this same position: while recognizing some common characteristics between the objects of mathematics and the objects of other scientific disciplines, she claims at the same time that «unlike material objects, […] mathematical constructs are totally inaccessible to our sense – they can only be seen with our mind's eyes» (Sfard, 1991, p. 3). In our common sensory perceptions, for example, numbers, points, angles, triangle, but unlimited geometric entities such as straight lines, do not exist. From this observation, a crucial question for mathematics education research arises: if direct access to mathematics elements is forbidden, how is mathematical knowledge possible?

To answer this question, Duval's semio-cognitive approach needs to be further investigated (see D'Amore et al., 2013; Duval, 2017; Iori, 2015).

In the main reference paper of this approach, Duval (1993) adopts the expression 'semiotic representation' to define «productions constituted by the use of signs belonging to a system of representations that has its own constraints of meaning and functioning» (Duval, 1993, p. 39); such representations are different from the mathematical object to which they refer but are necessary both for the purposes of communication and for any cognitive activity (Duval, 1993, p. 39). Therefore, starting from the assumption that every mathematical object is inaccessible to our senses, the only way to relate to it is through its representation expressed in some semiotic system. In other words: we are obliged to deal with representations made of signs, i.e. with semiotics. We are therefore affirming, in line with Duval's thought (1993), that in mathematics noetics (conceptual acquisition of an object) cannot exist without semiotics (representation realized by means of signs) and that semiotics is the first necessary step towards noetics: «In mathematics, the conceptual acquisition of an object necessarily passes through the acquisition of one or more semiotic representations» (D'Amore, 2001, p. 161).

These considerations about the nature of mathematical objects and their accessibility through semiotic representations have important effects in terms of learning. If it is true that «[…] on the one hand, the learning of mathematical objects can only be conceptual

[11] All quotations not in English are translated by the authors.

learning and, on the other hand, it is only through semiotic representations that any activity on mathematical objects is possible» (Duval, 1993, p. 38), then the process of mathematics learning inevitably leads to a cognitive paradox (Duval, 1993): if the only way to access the mathematical object is through semiotic representations, how can a student not confuse the mathematical object with its representation? And, on the other hand, how can one be able to manipulate mathematical objects (knowing that manipulation is only possible through semiotic representations) without having already appropriated the mathematical concept? Duval tries to answer these questions by investigating the semiotic and cognitive characteristics of mathematics and mathematical activity.

Semiotic representations are produced within semiotic systems, defined by Duval (2006a) and resumed in D'Amore et al. (2013) as sets of:

(a) «organizing rules to combine or group elements (signs) into meaningful units (expressions, elementary figural units);

(b) elements which acquire meaning only in contrast to other elements and their use, according to the organizing rules which allow to designate objects (for example, the digits of a numeral system)» (D'Amore et al., 2013, p. 31).

But, according to Duval, not all semiotic systems are registers of semiotic representations. For this to happen, in fact, the semiotic system must enable three fundamental cognitive activities (Duval, 1993):

1) the formation of a representation which is identifiable as a representation in a given register; examples include: enunciation of a sentence, drawing of a geometrical figure, writing of a formula, etc. This formation «must respect rules (grammar for natural languages, rules of formation in a formal system, construction limits for figures). The function of these rules is firstly, to ensure the conditions of identification and recognition of the representation and, secondly, to ensure use for treatment» (Duval, 1993, p. 42);

2) treatment, i.e. the transformation of the representation in the same register in which it was produced, such as paraphrasing in the natural language, calculation in symbolic writing, manipulation of images in the figural register;[12]

3) conversion, i.e. the transformation of the representation into a representation in another semiotic register, so as to «preserve all or only part of the initial representation's content» (Duval, 1993, p. 42).

We will now try to clarify these three cognitive activities, using and summarising a famous example taken from D'Amore (2001).

Let's consider the concept of 'half'. It can be represented in the common language through the use of expressions such as 'fifty-fifty', 'one half' and so on. In arithmetic language the same concept can be represented in other ways: through fractional writing (through infinite equivalent fractions 1, 2, 3, …), decimal (0.5), exponential ($5 \cdot 10{-}1$) and so on. In figural language (or rather, pictographic language to be more accurate), the concept of 'half' can be represented in almost infinite ways; below (**Figure 1**), we show three examples in which this concept is represented as the area of one of the two parts of the plane in which the figures have been divided with respect to the whole.

Fig. 1 – Three examples of 'half' figural representation.

The conditions for the first cognitive activity are satisfied, since each of the above examples identifies and allows us to recognize a semiotic representation of the concept of half. Within one of the three semiotic systems, for example the pictorial-figural one, treatment from one representation to another is possible by mentally or materially manipulating the given geometric figures. Within said semiotic register, it is thus possible

[12] Duval defines treatment in a figural register as "operations that can be carried out, materially or mentally, on the figural units of a given geometric figure to obtain a change in the configuration of this figure" (Duval, 1993, p. 58).

to identify the second cognitive activity, namely treatment. Finally, it is possible to transform each representation (for example the decimal notation 0.5) into another representation afferent to a different semiotic system (for example the expression 'half'): in other words, it is possible to make semiotic conversions from one semiotic system to another. The conclusion is that each of the semiotic systems examined is a register of semiotic representation.

From the examples just shown, it emerges that semiotic registers can differ substantially from each other.

In this sense, Duval (2006a, b, 2017) identifies four types of semiotic registers (**Table 3**).

	Multifunction registers	*Monofunction registers*
Discursive	Examples: natural written or spoken languages used for designing objects, reasoning, enunciation, etc.	Examples: symbolic notation (numeral systems, algebraic notation, formal languages, etc.).
Non-discursive	Examples: iconic (images that preserve the proximity relationships between parts of an object) or non-iconic (geometrical figures).	Examples: Cartesian graphs, diagrams, two-dimensional configurations of one-dimensional shapes, etc.

Tab. 3 – Classification of types of semiotic registers.

Discursive registers have a structure similar to that of natural languages; they allow operations of enunciation, designation and discursive expansion (which means articulating sentences in a coherent unit in the form of reasoning, description or explanation). Non-discursive registers have a different structure.

Monofunctional registers are specific to mathematics and typical treatment can take the form of algorithms (e.g. in algebra). Multifunctional registers, on the other hand, are used also outside mathematics, mainly with communication or objectification functions; in such registers, treatment cannot take the form of an algorithm, since the great variety of discursive operations (statements, designations, reasoning, descriptions, explanations, etc.) and non-discursive operations (illustrations, manipulations, constructions or deconstructions of figures) that they allow cannot be reduced to a set of instructions. For example, to justify the formula of the rhombus area, a number of different treatments can

be carried out in the multifunctional register of the natural language and, at the same time, in the multifunctional register of geometric configurations (D'Amore et al., 2013).

Taken all three together, the characteristics of semiotic registers (formation of an identifiable representation, treatment and conversion) have important consequences in terms of learning (D'Amore et al., 2013), as explicitly expressed in D'Amore (2001, p. 166): «what does 'construction of knowledge in mathematics' mean if not the combination of those three 'actions' on concepts, i.e. the ability to represent concepts, to treat and process the representations obtained within an established register and to convert representations from one register to another?».

In fact, geometry textbooks for primary and secondary school are rich in semiotic representations belonging to different registers. In this paper we focus our attention on two prevailing registers: the multi-functional discursive register of natural language and the multi-functional non discursive register of figural configurations (which we will call 'figural register' hereinafter). This choice is motivated by the very nature of mathematical objects and by the school levels we considered.

The examined textbooks also feature the monofunctional discursive register of symbolic geometric notations[13], but, compared to the two registers mentioned above, it is less frequent and also less rich and meaningful to discuss.

In the textbook pages where both registers are present (natural language and figural language registers), the reader is asked to perform the cognitive activity of conversion. According to Duval (1993, p.42) this process can take place in two directions:

- *illustration*: conversion from the natural to the figural language register;
- *description*: conversion from the figural to the natural language register.

However, in this cognitive process the reader is hardly ever left alone. In geometry textbooks, in fact, the transformation from a linguistic register to a figural register occurs by means of semiotic components, such as the use of colours, the spatial layout or the use of oriented lines; these components have a strong impact on the information conveyed to

[13] For example, the symbolic notation that identifies the side of a polygon with a pair of capital letters (AB, BC, CD etc.), a vertex with a capital letter (A, B, C etc.), an angle with a capital letter surmounted by a circumflex accent ($\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ etc.).

the reader, and therefore on the understanding of concepts. Since they do not specifically involve the objects of mathematics, these components are usually disregarded by the literature on mathematics education. Instead, in the following pages they will be taken into consideration, highlighting how they can positively or negatively influence the process of semiotic conversion between linguistic and figural registers, which is necessary for the conceptual learning of polygons.

2.2.2 The multimodal approach

Multimodality assumes that «different means of meaning making are not separated but almost always appear together: image with writing, speech with gesture, math symbolism with writing and so forth» (Jewitt et al., 2016, p. 2). In this perspective, multimodal analysis is based on some considerations:

- the attribution of meaning occurs through different semiotic resources, each of which has different potential and specific limitations;
- the act of attributing meaning involves the production of multimodal complexes;
- to study the meaning of something one needs to consider all the semiotic resources used to realize that meaning in a global sense.

Multimodal analysis concerns the analysis of communication in all its forms, with special emphasis on situations where two or more semiotic resources, or modes, interact and integrate to convey specific communication functions (O'Halloran & Smith, 2013). In other words, multimodal analysis mainly deals with multimodal complexes in which various semiotic resources strongly cooperate to define the meanings of the multimodal complex itself.

Multimodal investigation methods are based on the analysis of observable segments (text, video, audio, etc.), with the intention of describing, transcribing, annotating and analysing the various materials at a micro level, i.e. bringing attention to all the possible details that contribute to the meaning. Thanks to its characteristics, the multimodal approach is not so influenced by the specificity of the natural language in which the multimodal complex is inserted.

Some studies have addressed the concept of multimodality in the context of mathematics education. In this field, some scholars use the term multimodality to emphasize «the coexistence and importance of different modes or resources in learning and teaching processes: words (written or spoken), discipline-specific symbols (such as algebra symbols), diagrams and graphs, but also sketches, gestures, body positions, voice tones and any other aspect related to the embodied nature of knowledge» (Sabena et al., 2016, p. 1). Some of these studies analyse the role of the above-mentioned resources, concluding that they are central elements in the mathematics teaching-learning process (among others, see Nemirovsky & Ferrara, 2009; Radford et al., 2009; Roth, 2009).

In the field of multimodal research, O'Halloran (2015, p. 73) points out that mathematics is «a multimodal semiotic enterprise, the outcome of using language, symbolic notation and mathematics images to describe and predict patterns in space, number, quantity and arrangement». Building on previous studies (Halliday, 1978; Halliday & Matthiessen, 2004), multimodality has looked at issues related to mathematics education trying to investigate the impact of the multimodal nature of mathematics within the pedagogical discourse which unfolds in classroom (O'Halloran, 2015). However, the pedagogical discourse does not rely solely on the social dynamics between teachers and students. In fact, teachers can make use of textbooks, i.e. autonomous tools designed for conveying content and facilitating learning, including in mathematics education. Comparing English, Science and Mathematics textbooks from the 1930s, 1980s and 2000s, Bezemer & Kress (2010) emphasize how these materials have undergone profound changes in terms of content organisation, typography, writing, layout and use of images. These structural changes require users of textbooks to be aware of and pay attention to all the modes that operate within textbooks: users must become fluent in decoding all of these modes jointly, be they written text, images, typographical or layout aspects (Bezemer & Kress, 2010).

Since these elements (written text, images, etc.) are combined together in an attempt to construct meanings for the reader, it is fair to think that the way in which these elements are connected matters and is worth investigating. An example of this research strategy, which has already become a classic, is Bateman's (2008; Bateman et al., 2000) analysis of the meaning connections between the various elements of a page in terms of the

rhetorical relations of Rhetorical Structure Theory[14] (Mann & Thompson, 1988), whose descriptive apparatus he expanded so that it can be applied in multimodal contexts (Bateman, 2008; Bateman et al., 2000). Let us now see how an approach to multimodal discourse relations can relate to Duval's semiotic conversion process.

According to Bateman & Wildfeuer (2014), the notion of 'discourse relation' between contents expressed in different ways is a pillar of the textuality of multimodal texts. In their discourse interpretation and analysis, in fact, the authors construct «a semantic representation for each incoming contribution, traditionally a sentence or utterance, which is then linked by means of discourse relations into discourse structure» (Bateman & Wildfeuer, 2014, p. 187). This choice is adopted in multimodal texts, as they decided to use «the overall form of this framework for characterizing the discourse semantic stratum of all semiotic modes, independently of those mode's materiality» (Bateman & Wildfeuer, 2014, p. 187). Now then, if semiotic conversion is a cognitive operation performed by the learner, the 'invitation to conversion' can be understood as a multimodal discursive relation connecting two representations of the same content expressed in different semiotic registers. More specifically, that would be a relation belonging to the family of paraphrastic restatement relations (Rossari, 1994)[15], i.e. rhetorical relations in which the same meaning is manifested in different ways. In a school textbook, these relations are manifested, for example, through the intentional use of different graphic signs acting as connectors, such as arrows and colour, but also through precise choices in respect of page

[14] The Rhetorical Structure Theory is a text structure theory, according to which «text structures are hierarchic, built on small patterns called schemas. These schemas, which compose the structural hierarchy of a text, describe the functions of the parts rather than their form characteristics. Relations between text parts, comparable to conjunctive relations, are a prominent part of RST's definitional machinery» (Mann & Thompson, 1988, p. 85).

[15] The restatement relations family may also include an invitation to treatment, as conceived by Duval. Unlike the invitation to conversion, the invitation to treatment consists in connecting two representations of the same mathematical concept expressed in a single semiotic register. For example, the linguistic expression 'in other words' indicates the intention to clarify what is already expressed in the natural language register, but in a different way.

layout and content arrangement. These choices therefore refer to the use of semiotic resources and strategies that manifest a multimodal discursive relation.

Bearing in mind that in written texts «some words encode concepts and others encode procedures» (Wilson, 2011, p. 3), when dealing with multimodality in mathematical texts, two classes of signs should be distinguished: one representing mathematical entities and concepts and the other concerning signs that refer to procedural meanings, external to the discipline. The referent of the former is a mathematical object, while the referent of the latter involves a reader's cognitive process. Unlike mathematical objects, procedural encoding tools do not seem to be discipline-specific, but are the result of non-formalized editorial *savoir faire*.

Therefore, some graphic and procedural choices concerning page layout can indicate specific rhetorical relations pertaining to restatement, which, in the intention of meaning makers, should invite the reader to activate the part of mathematical understanding that has been called 'semiotic conversion'. Such choices, however, may facilitate the reader's task or hinder it. In fact, as we shall see in the next paragraph, different uses of the same resource can display varying degrees of effectiveness when it comes to eliciting conversion.

2.3 Corpus of analysis

Our analysis is based on examples of Italian-language primary school textbooks taken from the corpus of the project. Since polygons are handled at different stages during compulsory school years, it was possible to get examples from a set of textbooks used in the seven years of schooling.

The corpus of the project consists of 142 school textbooks, divided as follows:

- 41 Italian second- and third-year primary school textbooks;
- 42 Italian fourth- and fifth-year primary school textbooks;
- 46 Italian first, second- and third-year lower secondary school textbooks;
- 7 Swiss second- and third-year lower secondary school textbooks (from Italian-speaking Canton of Ticino);

- 5 Swiss textbooks, from second to sixth year of primary school (from Italian-speaking areas in Canton of Grisons);
- 1 Swiss first year lower secondary school textbook (Canton of Grisons).

Therefore, the corpus from which we were able to draw comes from Italy (129) and Switzerland (13). The numbers of textbooks of Italian-speaking part of Switzerland differs from Italy. This is because, in Canton of Ticino, it is not as widespread as in Italy the use of the textbook in teaching practice.

As all the examples below come from the Italian country, we now draw some preliminary considerations about the context.

In Italy, textbooks adopted in primary school change between the first three years (first-third primary school) and the last two years (fourth-fifth primary school). Since titles (and types) of books are different for the two periods, this subdivision was maintained within the corpus. In lower secondary school, on the other hand, the adopted text is usually maintained in all the three years of school. In this way three subgroups were formed: second and third year primary school; fourth and fifth year primary school; first, second and third year lower secondary school, which are the years in which the polygons are presented. It is important to make it clear that, in primary and lower secondary schools, each teacher is free to choose among the large variety of titles offered by the publishing market. This publishing market is formally free from ministerial constraints, even if every publishing house active in the school environment tries to comply with the national curriculum of the Ministry of Education, University and Research (MIUR) regarding the content to be dealt with at various school levels. The categorization of the textbooks in Italmatica corpus was done through the attribution of a unique identification code consisting of two numbers separated by a '_': the first number indicates the position of the title in the ranking of adoptions on a national basis for the year 2017/2018; the second number indicates the corresponding school grade. This means, for example, that the code 3_4 is referred to the third most widely adopted book in the fourth year of primary school.

2.4 Analysis of conversion in textbooks – some examples

In this paragraph we will explore some semiotic resources and strategies that manifest a multimodal restatement relation, arguing how the use of such resources and strategies may promote or hinder the cognitive conversion process; we will also discuss the fact that certain textbooks fail to use such resources to elicit conversion. In pursuing this explorative goal, it seemed more significant to us to investigate a wide range of examples in depth, rather than go into quantitative data. Among these examples, we have found interesting and at the same time complex cases, so we decided to focus on the depth of the analysis and interpretation of the texts, revealing significant multimodal intertwining in the relationship between language and mathematics. The analysis proposed in this paper only considers introductions to the topic of polygons in Italian primary school textbooks, i.e. the introductory sections that usually contain definitions and representations of the elements of a polygon – namely: vertices, sides, diagonals, angles, etc.

Examples so selected were assessed on the basis of the following three categories of analysis:

- use of colour with function of similarity;
- proximity of elements in spatial organization;
- graphic signalling by means of oriented lines.

The first two categories explicitly refer to two Gestalt principles, already borrowed in the multimodal field by Bateman (2008) on the basis of Waller's work (1987), specifically: similarity, defined as «the perceptual tendency to group elements because they seem to be alike in shape, colour, size, sound, and so forth» (LaSpina, 1988, p. 97) and proximity, defined as «the perceptual tendency to group together those things that are located close to one another» (LaSpina, 1988, p. 97). The third category is often discussed in studies of the discourse structure of multimodal page-based documents, and more specifically, of textbooks. On the one hand, the directionality of arrows guides the eyes and suggests a reading direction to the reader (Bearne, 2004, p. 22). On the other hand, the connecting line suggests a meaning composition operation between the connected blocks. Thibault (2001) examined graphical connecting elements between layout elements belonging to different modalities and observed that the meaning of the resulting structure cannot be

reduced to the mere composition of the meanings of the connected blocks. The connectors, such as lines or arrows do have a semantics of their own. According to Thibault (2001) the semantics of arrows and similar vectors that connect a 'label' and a 'labelled' block have an abstract semantics that is similar to that of the verbal copula be, spanning readings from identity to attribution. Developing Thibault's ideas, Bateman (2008) proposes a set of five core rhetorical relations expressed by suchlike connecting lines: (a) identification, (b) class ascription, (c) property ascription, (d) possession and (e) location. As already hinted above, we follow here a similar approach based on rhetorical relations, but the kind of rhetorical relations we find in our corpus differs from Bateman's set.

In order to avoid problems related to copyright, and to enable readers to understand the language of the analysed extracts, all the images have been re-created starting from the original and translating any written text from Italian into English.

1) Use of colour with function of similarity

In textbooks, colour is often used as a resource to indicate the correspondence between different kinds of elements. Through this strategy, the reader is invited to recognize the same mathematical object across representations in different registers, thanks to the fact that all relevant representations are presented in the same colour. In this sense, the similarity of colour can be understood as the manifestation of a paraphrastic restatement relation that encourages the reader to start a semiotic conversion process.

2) Proximity of elements in spatial organization

The way in which various elements are arranged within the book page can influence the reader's perception. Thus, if different representations of the same mathematical object are placed close together, it is natural to think that there is some kind of connection between them; by contrast, if two different representations of the same object are not close together, the reader is not stimulated to recognize a connection between these elements. In this case, therefore, it is the use of proximity in organising content in any given page which can be interpreted as an indication of a paraphrastic restatement relation that invites the reader to start a semiotic conversion process.

3) Graphic signalling by means of oriented lines

Oriented lines are very common in textbooks because they are procedural signs, i.e. signs that represent a process. They mainly come in the shape of an arrow, i.e. a graphic element with a specific orientation which can act as a connector. If used between two semiotic representations expressed in different registers, these signs can be interpreted as marks of restatement that invite the reader to start a semiotic conversion process.

In the examples given in support of the analysis, it should be considered that sometimes the choice of how and whether to use a certain resource to encourage conversion is local, i.e. specific and limited to a certain portion of the book, while other times it is global, i.e. based on stylistic decisions of a more general nature, recognizable and identifiable as a precise modus operandi that informs the graphic design of the entire textbook. Between these two extreme cases, there are situations where choices are not clear – as evidenced by the implementation of different styles within the same book – resulting in a certain stylistic ambiguity. In this contribution we will limit ourselves to considering small portions of the text, focusing on how these choices, whether global or local, can favour or hinder the conversion process.

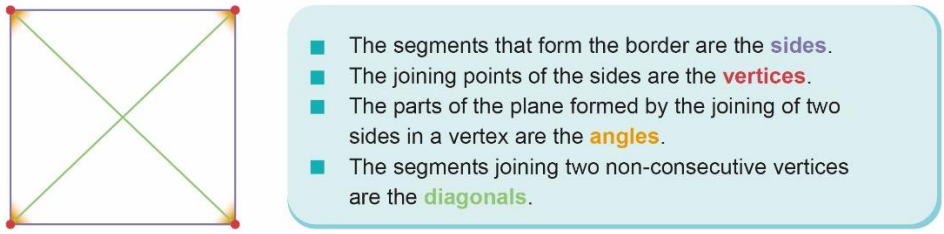
2.4.1 Use of colour with function of similarity

The following examples show how colour can be used in school textbooks in a conscious and explicit way to encourage conversion processes, with similarity being progressively highlighted and made explicit. In fact, in some cases the use of colour to show similarity concerns only two of the resources/representations of the mathematical object under consideration (figure, name in the text, name in the figure, arrows), in other cases it concerns three or more of them.

2.4.1.1 Coherent use of colour similarity to facilitate conversion

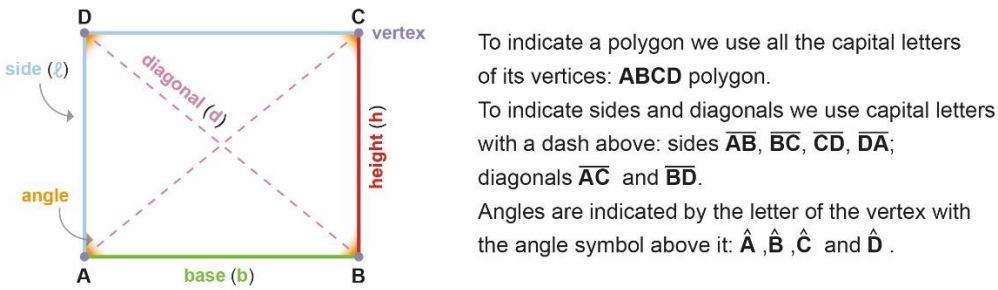
The following four examples show a use of colour that favours semiotic conversion with different and increasing degrees of similarity.

In **Example 1**, the words ‘sides’, ‘vertices’, ‘angles’ and ‘diagonals’[16] in the textual explanation on the right are coloured purple, red, orange and green respectively. The same colours are used to highlight the corre- sponding elements of the polygon represented figuratively on the left: the sides are coloured purple, the vertices red, the corners orange and the diagonals green.



Example 1: Use of colour in the left figural part and in the right textual part (8_4 corpus textbook).

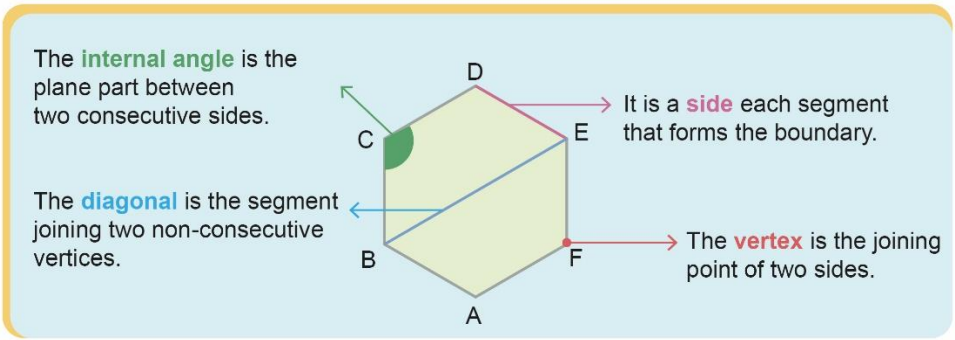
In **Example 2**, the colour similarity is employed to match figural elements and labels without involving the extended textual part: the same colour is used in the word label (‘side (l)’, ‘angle’, ‘base (b)’, etc.) and in the representation of the corresponding element in the figure.



Example 2: Use of colour on the left side, both for the linguistic and figural elements (5_4 corpus textbook).

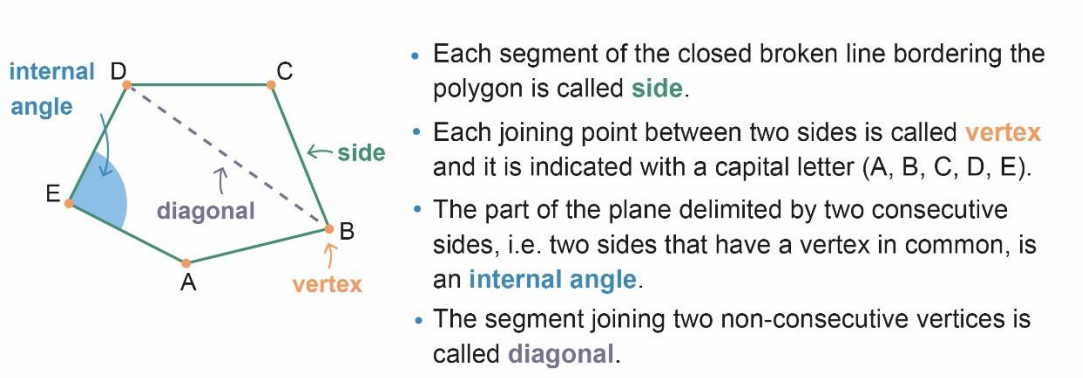
[16] For expositive reasons, when referring to words or sentences written in the text, we will use single high quotation marks.

In **Example 3**, a triple colour match is made between the words ‘internal angle’, ‘side’, ‘vertex’ and ‘diagonal’, the figural representation of the geometric entity and the arrows. For example, the colour green is used for the expression ‘internal angle’, for the representation of the angle as a circular section inside the polygon and for the arrow connecting the angle to the expression ‘internal angle’.



Example 3: Triple use of colour for conversion (4_3 corpus textbook).

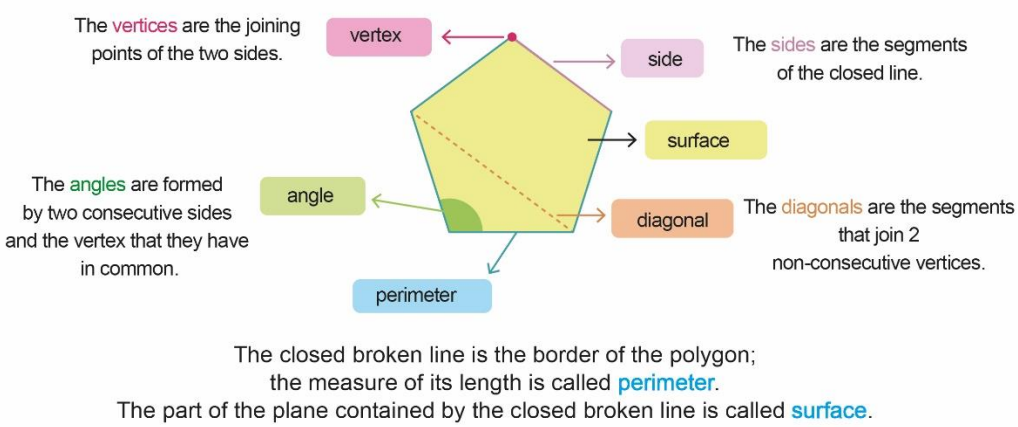
Example 4 follows the same logic but goes a step further since the word referring to the geometric object is reported twice: once in the text (right part of the figure) and once to name the figural representation of the entity (left part of the figure).



Example 4: Use of colour in four ways: figural representation of the geometric entity, textual representation of written words both inside the text and near the figure, and depiction of arrows (13_4 corpus textbook).

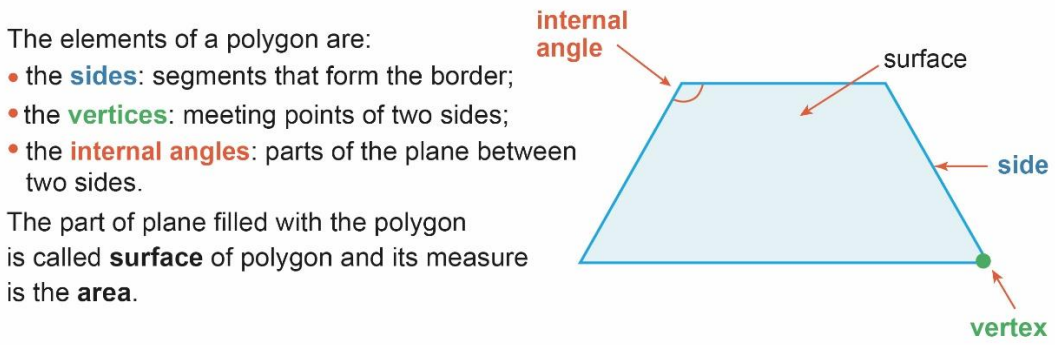
2.4.1.2 Inconsistent use of colour similarity to facilitate conversion

The examples given below also appear to reveal that the intention of the meaning makers was that of using colour to support a semiotic conversion process from the natural language to the figural register. However, unlike the cases seen so far, the realization of these purposes is somewhat less consistent, more ambiguous and, arguably, less effective. In **Example 5**, the inconsistency mainly lies in the way the surface area of the polygon is treated. The surface is in fact associated with three different colours, a light yellowish tone (in the rectangular box and in the part of the inner plane around the polygon), blue (in the textual part below) and black (arrow element). This semiotic inconsistency affects the geometric entity 'surface': in this case, the colour used has no similarity function. In other words, in the case of the surface area, the colour used has no similarity function. While this inconsistency might be due to an unfortunate and ill-considered chromatic choice (the scarcely visible yellowish tone), it could create a certain degree of ambiguity in the reader, who may not make sense of the fact that three colours are associated with the surface area, one of which (blue) is also used for the perimeter. A certain ambiguity could be also generated by the use of different shades of green in the case of the angle, even if less marked: the green used in the figural representation of angle and in the arrow is different both from the one used in the label and from the one used in the linguistic representation.



Example 5: Inconsistent use of colour when treating the polygon surface (14_4 corpus textbook).

Also in **Example 6** colours are used ambiguously: in the case of the internal angle, red is used both for the linguistic elements (in the textual part on the left and in the label next to the figure) and for the figural elements (in the arc which graphically represents the geometric object and in the arrow connecting the latter and the word/label ‘inner angle’); however, red is also used for the other three connecting arrows. Moreover, while there is colour similarity between the figural representations of the inner angle and vertex and the word/label of the same objects, no similarity can be observed in the case of side and surface: darker blue is used for the word ‘side’ but the sides of the polygon are light blue in the figural representation; as for the surface area, black is used in the linguistic representation, blue in the figural representation.

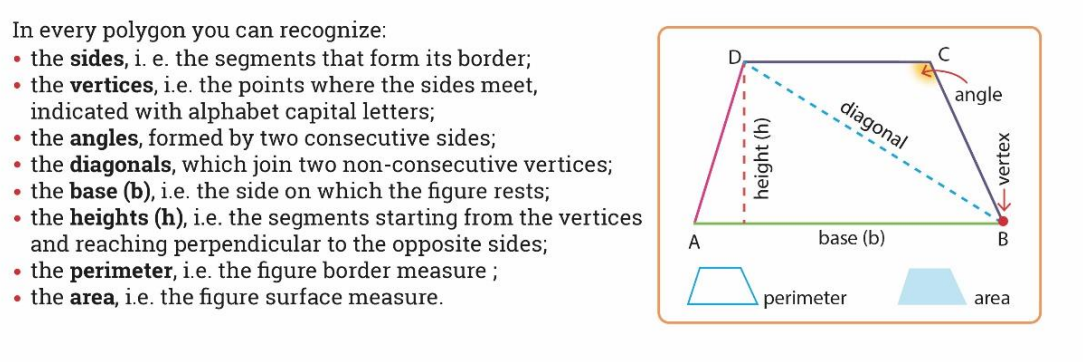


Example 6: Multi-level ambiguous use of colour (6_3 corpus textbook).

2.4.1.3 Non-use of colour similarity to facilitate conversion

Colour is not always used as a resource for facilitating conversion, as can be seen in the following two examples. In **Example 7**, colour is used exclusively in the figural register to represent different geometrical entities: green is used to represent the base; red is used to represent the vertex and the height; yellow is used to represent the angle; blue is used to represent the diagonal, the perimeter and the area, fuchsia is used to represent one side, purple is used to represent other two sides of the polygon. Leaving aside all issues concerning the lack of internal coherence resulting from these choices (why are the same colours used to represent different entities?), in this case we want to highlight another aspect regarding the non-use of colours in the linguistic register. The words ‘sides’, ‘vertices’, ‘angles’ etc., in fact, are written in black both in the textual part on the left and

in the labels next to the figure. That is, the colours used to represent the geometric objects in the figural register are not recalled in any way in the natural language register, nor is there a consistent use of the colour of the arrows. In other words, the similarity function is not exploited to help the reader recognise equal objects represented in different ways. Moreover, the same colour (red) is used in the figural representation of one height and one vertex, and in the two arrows, making it more difficult to coordinate information consistently and clearly.



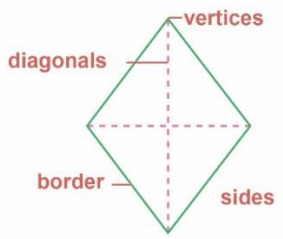
Example 7: Non-use of colour in the language registers to facilitate conversion (1_4 corpus textbook).

In **Example 8**, the colours red, fuchsia and green are used in the right section, but again this choice does not seem to facilitate in any way the conversion between the elements of the polygon represented linguistically and the same elements represented in the figural register:

- in the linguistic register there is no colour differentiation: all the words are coloured red;
- there is no colour correspondence between the two registers: the linguistic elements (words) ‘diagonals’, ‘vertices’, ‘sides’, ‘border’ are coloured differently from the same elements represented in the figural register;
- the line segments next to the words ‘vertices’, ‘diagonals’ and ‘border’ are the same colour as the words ‘vertices’, ‘diagonals’ and ‘border’, but not the same colour as the figural elements to which they refer: the vertex is not clearly indicated, the diagonal is fuchsia, the border is green.

In this case, colours seem to be used for decoration purposes rather than as multimodal resources capable of conveying information. At best, colours follow the "syntactic" role of the element in the layout structure: main text in black, words in captions in red, connectors in red. In any case, colour similarity is not used to facilitate the recognition of the same entities represented in different ways.

The segments of the broken line are the **sides** of the polygon.
The joining points of the sides are called **vertices**.
The **diagonals** are the segments joining two non-consecutive vertices.
The broken line that delimits the polygon is the **border** or boundary of the polygon. The **perimeter** is the polygon border measure.
The part of the plane limited by the broken line is the **surface**.



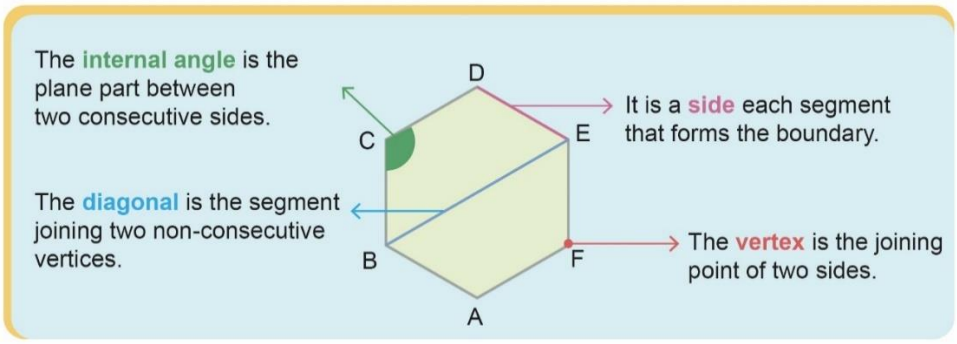
Example 8: Ornamental/syntactic use of the colour on the right side (10_5 corpus textbook).

2.4.2 Proximity of elements in spatial organization

The way in which various textual and figural elements are organized on the page can facilitate or hinder the process of semiotic conversion. Layout-specific choices having to do with the spatial organization of contents in terms of proximity may or may not suggest meaningful relationships between specific elements (Bezemer & Kress, 2010, p. 20; Waller, 1987).

2.4.2.1 Coherent use of proximity to facilitate conversion

In the following case (**Example 9**), which has already been analysed from the colour point of view, the figure is at the centre of the page and is surrounded by four textual elements, each of which is placed near the corresponding figural element to which it is connected by arrows. This design makes reading more effective and allows readers to orient themselves from a spatial point of view so that they can recognize a correspondence between the geometric objects represented in the figural and linguistic registers. In other words, the spatial proximity of elements belonging to different semiotic registers facilitates the reader in the process of semiotic conversion.

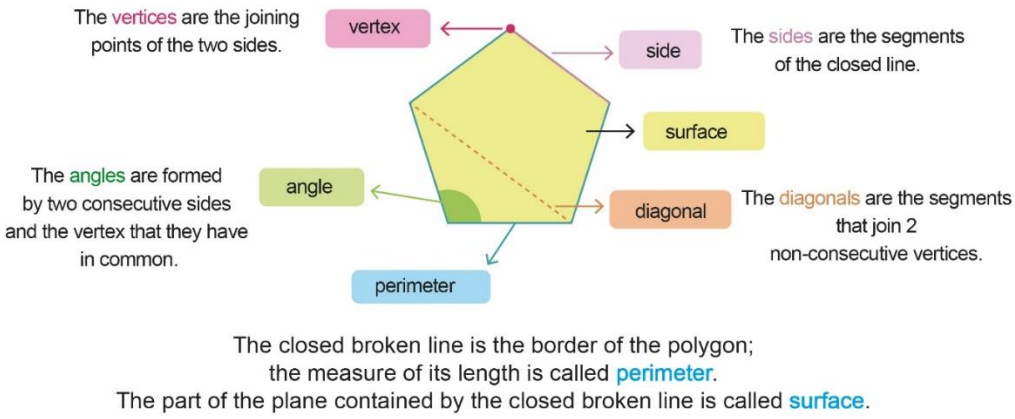


Example 9: The spatial organization of the elements within the page facilitates the semiotic conversion process (4_3 corpus textbook).

2.4.2.2 Inconsistent use of proximity, which may hinder conversion

However, the organization of the elements on the page is not always consistent. In the following Example (**Example 10**), which has already been analysed in the previous paragraph, the spatial organisation of the elements seems effective at first sight. However, surface and perimeter are handled inconsistently. Consider the sentence 'The part of the plane contained by the closed broken line is called surface'. This sentence – a definition of polygon surface for all intents and purposes – is not located near the label 'surface', as happens in the case of vertex, side, diagonal and angle; surface definition, instead, it has been inexplicably placed below the definition of perimeter. On the other hand, the perimeter is also treated unclearly. In fact, unlike the cases of vertex, side, diagonal and angle, the definition of perimeter is preceded and followed by two other definitions, namely: the definition of border (which, among other things, has no corresponding label in the portion of the page) and the definition of surface. From a visual perspective, this design is inconsistent for two reasons: the spatial proximity between the label and the definition is not respected and the one-to-one relation between the label and the corresponding definition is not respected[17].

[17] Additionally, this example shows a case of mathematical inconsistency since the perimeter is defined as a quantity associated with the polygon border. However, the same word 'perimeter' is used in the label which is connected by an arrow to the figural element that represents the polygon border.



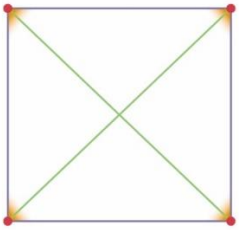
Example 10: Inconsistent spatial organization of the elements on the page (14_4 corpus textbook).

2.4.2.2 Non-use of proximity to facilitate conversion

The spatial organization of textual and figural elements is not always used to encourage the reader's semiotic conversion process.

In **Example 11**, two separate sections can be seen: the one on the left, in which the geometrical entities are represented in the figural register; the one on the right, in which the same elements are treated linguistically.

Essentially, *perimeter is border*, i.e. what is mathematically a quantity is considered a geometric object. This inconsistency is reinforced by two factors: first, the use of the same colour, (blue) in all four elements, both linguistic and figural ones; second, the fact that all the other geometrical concepts on the page concern mathematical objects, and not the quantities associated to them.



- The segments that form the border are the **sides**.
- The joining points of the sides are the **vertices**.
- The parts of the plane formed by the joining of two sides in a vertex are the **angles**.
- The segments joining two non-consecutive vertices are the **diagonals**.

Example 11: Organisation of the page into two distinct sections (figural and textual), which does not facilitate conversion (8_4 corpus textbook).

The intention of the meaning makers seems to be that of focusing separately on the figural part and the textual part of the description. There is no one-to-one proximity relation between linguistic and figural elements; rather, there is proximity between the two blocks. In this case, therefore, proximity is used so that the reader recognizes that the two blocks, the right and the left one, represent a whole. This choice of layout syntax gives the reader a clear and 'clean' perception of the page; however, from the point of view of semiotic conversion proximity is not exploited. In this case the only semiotic resource used to facilitate the conversion is the use of colour, as discussed in Section 2.4.1.

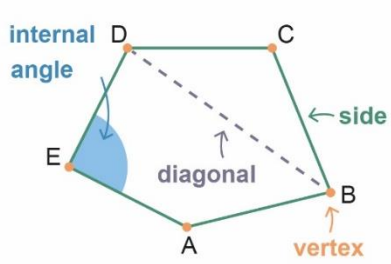
2.4.3 Graphic signalling by means of oriented lines

In order to facilitate the reader's semiotic conversion process, a further resource can be considered: namely, the typographical mode in which the elements represented in the figural register and in the linguistic register are linked together. These links, if and where present, can be used to indicate which element is being referred to in the text. From the point of view of mathematics education, these elements can perceptively favour the two cognitive conversion processes that Duval (1993, p. 42) named 'illustration' and 'description'. While connecting lines may appear "figural" at first blush, they do not belong to any semiotic register of representation of geometrical objects: they are procedural semiotic resources, i.e. signs that activate an interpretive instruction rather than

referring to entities or relations in the represented geometrical world. In this respect, they function exactly like colour and the use of proximity in page layout.

2.4.3.1 Coherent use of oriented lines to facilitate conversion

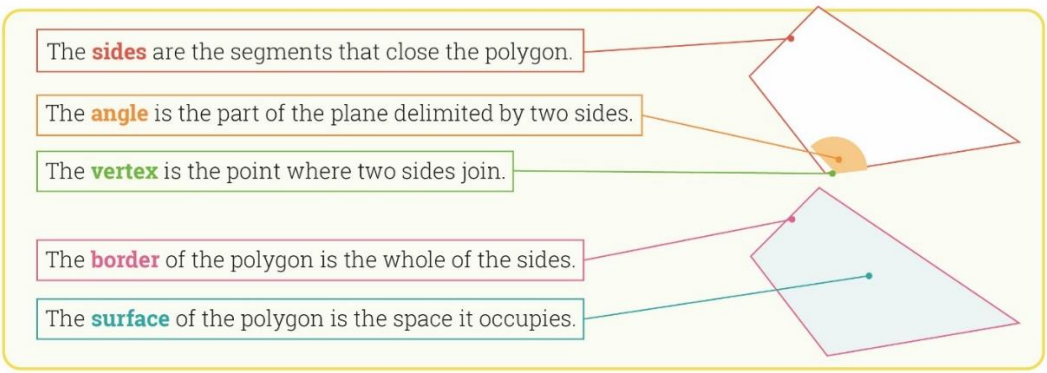
The following example (**Example 12**) has already been analysed from the point of view of colour, but can also be considered in this category of analysis. In fact, the arrows on the left side have the function of indicating which figural element the words ‘internal angle’, ‘diagonal’, ‘vertex’ and ‘side’ refer to.



- Each segment of the closed broken line bordering the polygon is called **side**.
- Each joining point between two sides is called **vertex** and it is indicated with a capital letter (A, B, C, D, E).
- The part of the plane delimited by two consecutive sides, i.e. two sides that have a vertex in common, is an **internal angle**.
- The segment joining two non-consecutive vertices is called **diagonal**.

Example 12: Use of arrows to facilitate conversion (13_4 corpus textbook).

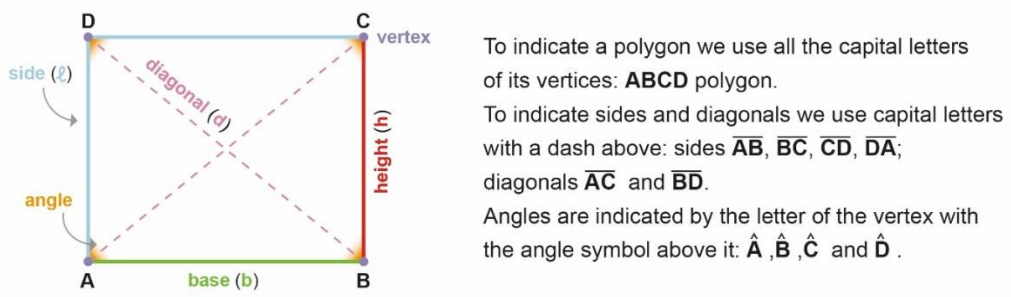
In the following example (**Example 13**), segments with a small circle (dot) at one end are used instead of an arrow. This dot seems to have the same function as the arrowhead of the previous case, i.e. to indicate which element, represented in the figural register, is being referred to. Therefore, this is another example of graphic signalling, realized through an oriented line, which can facilitate the reader in the process of semiotic con- version between the elements. It should be noted, however, that in this case the use of the dot instead of the arrow could create confusion, as one may think that the figural representation of the vertex coincides with the dot of the oriented line. Moreover, the confusion could also be increased by the proximity of the green dot (referred to the vertex) with the orange dot (referred to the angle).



Example 13: Using a different line type as a graphic element to facilitate conversion (1_3 corpus textbook).

2.4.3.2 Inconsistent use of oriented lines to facilitate conversion

In **Example 14**, the specific procedural sign (the arrow) that allows establishing a connection between elements is present only in two cases (the side and the angle) while it is missing for the other four elements (diagonal, height, vertex and base). In the latter case, a perceptual connection between linguistic elements and figural elements is achieved only through spatial proximity between figural representation and linguistic expressions. Compared to proximity alone, the use of arrows is more precise in creating links between representations of geometrical objects, and the use of two different semiotic means for the same aim does not seem to be clearly motivated here. It could be argued that non-homogeneous handling of elements within the same communicative unit creates noise, i.e. non-significant perceptual differences that the reader needs to learn to disregard, detracting from the effectiveness of the multimodal text.

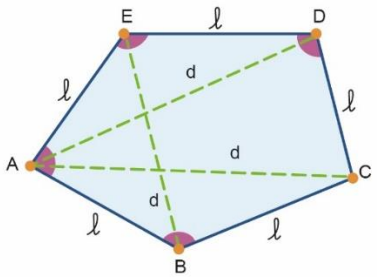


Example 14: Inconsistent use of oriented lines (5_4 corpus textbook).

2.4.3.3 Use of arrows for purposes other than conversion

Finally, in the corpus we find some instances, as in **Example 15**, where the arrow is not used to indicate the connection between textual and figural elements: on the left side, the arrow is used within the textual representation to make each *definiendum* – 'side' 'vertex', 'diagonal', 'angle', 'surface' – correspond to its *definiens*. This use has some problematic aspects. Within the text block, processing follows the "text flow" (Bateman 2008) and there is no need of the directional orientation that oriented lines can provide. Furthermore, pupils are in the process of learning the specialized language of mathematics where symbols with conventional meanings are used alongside words in the natural language register to talk about mathematical objects. The typographical arrow symbol may well look like a mathematical symbol (and could be a mathematical symbol in another context) but, in fact, does not correspond here to any conventional meaning and its use as punctuation sign separating *definiendum* and *definiens* (instead of the more usual colon) is uninfor- mative and verges on ornamentation.

- **SIDE** (ℓ) → It is each of the segments that form the closed broken line.
- **VERTEX** (A, B, C ...) → It is the joining point of two sides.
- **DIAGONAL** (d) → It is the segment that connects two non-consecutive vertices.
- **ANGLE** ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ...) → It is the space between two sides that have a vertex in common.
- **SURFACE** → It is the part of plane within the closed broken line.



Example 15: Use of arrows for purposes other than conversion (16_4 corpus textbook).

2.5 Conclusion

In this paper we have made the first steps towards the integration of two theoretical frameworks – Duval's semio-cognitive approach, which is specific to mathematics education, and multimodal discourse analysis – in order to analyse mathematics textbooks for the primary school. More specifically, we analysed how the use of specific resources and semiotic strategies that invite the establishment of the rhetorical relation of restatement can favour or hinder the reader's conversion process between geometric entities

represented in the figural register and in the natural language register. Based on the wide range of applicability of multimodal con- structs, we were able to exploit these two integrated approaches and conduct an analysis which is independent of the Italian language specificities, so much so that we were able to translate the linguistic parts of the examples into English without changing reflections. We believe that this research has been fruitful. First, the analysis of corpus examples showed that the use of multimodal strategies in textbooks (in particular, use of colour with function of similarity, proximity of elements in the spatial organization, graphic signalling by means of oriented lines) can be inconsistent and does not always ensure the presence of an effective invitation to semiotic conversion between representations of the same entity expressed through different semiotic registers. Certainly, modern geometry textbooks, such as those in the corpus, do mobilize relatively rich multi- modal resources for meaning making, but their use is not always consistent and not always purposeful, drifting occasionally towards ornamentation. From the viewpoint of mathematics education, it is important to high- light that beyond the specific semiotic representations of mathematical entities, there are other types of semiotic resources that affect the reader's understanding of any given concept in a school textbook. In particular, we have highlighted how these resources have an impact on a specific aspect of understanding in mathematics, namely: the cognitive process of semiotic conversion defined by Duval. The results of this research greatly broaden the framework usually considered by experts in mathematics education; in particular, it emerges that the meaning makers are not only the authors of the book, but also those who deal with typographical aspects and page layout. These aspects might be worth considering, especially by practitioners involved in mathematics education and mathematical learning difficulties. Mathematics learning is based on the coordination between different semiotic representations: it is therefore a complex phenomenon, in which we must pay attention to the resources and strategies that convey such coordination.

On the other hand, our attempt certainly has some limits. First, we have focused only on the conversion between two semiotic registers (figural register and natural language register), excluding the conversion into and from other registers that may be present in a geometry textbook. Moreover, attention has been focused on one category of analysis at a

time, while we know that the attribution of meaning is very often a global process, which necessarily involves the use of several semiotic resources at the same time with the activation of multiple cognitive strategies. Finally, we focused exclusively on the textual product (the textbooks in the corpus), without any direct evidence of the intentions of the producers and of the reception of the readers. Ethnographic studies of writing could tell us more about the production of mathematics textbooks and the degree of coordination between authors, editors and graphic designers. Ethnographic studies in the classroom would be needed to observe how the multimodal texts examined enter richer and messier learning processes in interaction.

Nevertheless, it seems to us that this contribution serves the purpose of building interdisciplinary research horizons so that, thanks to the fruitful exchange between disciplines, we can investigate the same phenomenon through different approaches and tools. This can only add depth to the way in which, for example, the challenges of mathematics education are being addressed.

Capitolo 3. Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare e media in lingua italiana

Silvia Sbaragli•, Michele Canducci•° e Silvia Demartini•
• Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI – Locarno, Svizzera
° Facoltà di comunicazione, cultura e società, USI – Lugano, Svizzera
silvia.sbaragli@supsi.ch, michele.canducci@supsi.ch, silvia.demartini@supsi.ch

Sunto / In quest'articolo si intende portare l'attenzione sulle modalità logico-argomentative presenti nei testi scolastici di matematica, focalizzandosi sulla parte di geometria e, nello specifico, sul tema *poligoni*, considerando la ricorsività dell'argomento in continuità fra gli ordini scolastici (dalla II elementare alla III media). L'indagine è strettamente interdisciplinare fra matematica e linguistica, con particolare attenzione alla didattica, e si inserisce nei lavori di un più vasto progetto di ricerca in corso. Dopo alcuni paragrafi iniziali dedicati a illustrare il corpus di libri e i criteri di analisi del testo adottati, si passerà a una parte di inquadramento storico-disciplinare del tema, per addentrarsi poi nella descrizione delle diverse modalità logico-argomentative (legate al far "fare", al far "immaginare" e al far "astrarre"); di queste saranno anche offerti dati quantitativi relativi alla distribuzione nel corpus. Alcune possibili implicazioni didattiche emerse dalle analisi saranno accennate nelle conclusioni.

Parole chiave: argomentazione; libri di testo scolastici di matematica; discorso matematico; poligoni; linguistica testuale.

3.1 L'oggetto di analisi e il corpus di testi in esame

Il tema trattato in questo contributo si inserisce all'interno del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico*

(progetto 176339 del Fondo nazionale svizzero per la ricerca scientifica). Grazie a un gruppo eterogeneo di ricercatori in didattica della matematica, linguistica e computer science, il progetto ha l'obiettivo di individuare, raccogliere e analizzare, dal punto di vista linguistico e matematico, un corpus di libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana della scuola elementare e media, al fine di delinearne le caratteristiche e i possibili ostacoli per la comprensione degli alunni.

L'argomento matematico su cui si è concentrata l'attenzione è interno all'ambito geometrico e riguarda i poligoni, in un'ottica di continuità dalla scuola elementare alla scuola media. L'argomento dei poligoni, infatti, permea tutta la scuola dell'obbligo, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche, in cui alcuni degli argomenti affrontati dagli allievi nei primi anni di scolarità vengono consolidati e approfonditi in diverse occasioni negli anni successivi. Questa scelta ci ha permesso di raccogliere libri di testo riferiti a sette anni di scolarità, dalla seconda elementare alla terza media, arrivando a comporre una panoramica multiforme e sfaccettata, all'interno della quale convivono elementi di eterogeneità e di unitarietà.

Dal punto di vista classificatorio, il libro di testo sfugge a categorizzazioni nette. A livello di funzione prevalente, è tipicamente considerato un testo di tipo *informativo* (o *espositivo*), o, ancora meglio, «espositivo-esplicativo» (A. Ferrari, 2019, p. 78), e presenta, com'è noto, tratti ricorrenti: veri e propri stilemi e modalità espressive sedimentate nel tempo. È però altrettanto noto che non si tratta di un genere omogeneo al suo interno, ma ibrido: ciò è più che mai evidente nei testi di matematica, che alternano parti caratterizzate da uno stile vicino alla saggistica disciplinare classica a parti più vicine alla lingua comune, dedicate, per esempio, a sollecitare il giovane lettore evocando legami con l'esperienza diretta. Anche a causa delle sue stesse caratteristiche, il testo scolastico, si trova a essere sì un oggetto di riferimento in didattica, ma non sempre funzionale e per questo non pienamente sfruttato dai docenti, o, almeno, non in tutte le sue parti (sull'uso del libro di testo di matematica da parte dei docenti italiani e ticinesi, si vedano Canducci et al., 2020; Sbaragli et al., 2020). Analizzarne più a fondo le modalità comunicative[18] può

[18] Data la natura interdisciplinare del progetto − che indaga la didattica della matematica attraverso l'esame degli aspetti linguistici in essa coinvolti −, il gruppo di ricerca ha potuto effettuare analisi sui

quindi essere un primo passo per capirne meglio limiti e punti di forza, anche nella prospettiva di rendere più consapevoli i docenti.

In questo contributo, nel par. 3.2 presenteremo il modello di analisi testuale dei libri scolastici di matematica da noi adottato, cosa che ci permetterà di focalizzare l'attenzione sul tipo di Movimento Testuale oggetto di analisi, da noi chiamato *logico-argomentativo*. Nel par. 3.3 verrà inquadrato il tema dell'argomentazione in chiave interdisciplinare, mettendo in evidenza alcuni dei tanti risvolti che questo ambito d'indagine ha avuto nella storia del pensiero e della cultura. Ciò nella consapevolezza che l'*argomentazione* è un tema di vastissima portata, su cui sin dall'antichità classica si sono concentrate le riflessioni di filosofi e matematici (le cui figure spesso coincidevano), e con cui, nei secoli e per vari fini, si sono confrontati studiosi di vari ambiti, con crescente attenzione da parte delle diverse discipline. Questa longevità e certe peculiarità della tradizione occidentale (anche rispetto alla prassi scolastica) conferiscono al tema *argomentazione* notevole importanza nella ricerca in didattica, soprattutto negli ultimi decenni, se si considera che la competenza argomentativa è considerata oggi un traguardo condiviso esplicito dalle varie discipline (e segnatamente dalla matematica) nei vari piani di studio/indicazioni nazionali, e nelle prove standardizzate nazionali e internazionali. Dopo questo quadro storico e interdisciplinare, nel par. 3.4 verrà presentata l'analisi del Movimento Testuale *logico-argomentativo* peculiare dei testi matematici, esplicitando le sue diverse possibilità di realizzazione osservate nei testi, attraverso l'enucleazione di esempi che consentono di capirne meglio la natura sfaccettata. Verranno in seguito presentati i risultati dell'analisi condotta su tutto il corpus di libri di testo italiani e svizzeri, andando a evidenziare l'evoluzione delle diverse categorie di Movimenti *logico-argomentativi* lungo i sette anni di scolarità considerati per poi giungere alle conclusioni.

---

testi a più livelli, di tipo sia quantitativo sia qualitativo. Le analisi dei libri di testo si sono per ora concentrate sulle seguenti dimensioni: aspetti strutturali di architettura testuale dei testi scolastici (Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020); aspetti lessicali e morfosintattici dei testi scolastici (Canducci et al., 2019a, 2019b; Canducci, Demartini & Sbaragli, in press; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini & Sbaragli, 2019a, b); aspetti legati al rapporto multimodale fra testo e figure nei manuali (Canducci, 2019; Canducci, Rocci & Sbaragli, in press).

3.2 Analisi testuale dei libri scolastici di matematica

L'analisi dei testi scolastici di matematica si basa su un adattamento del modello di analisi della testualità elaborato dal gruppo di ricerca basilese, descritto in A. Ferrari (2014, 2019). Tale modello considera il testo come composto da una sequenza di unità semantiche, organizzate gerarchicamente su tre livelli (tralasciando, qui, le partizioni di ordine superiore, come i capitoli e i paragrafi): «i Movimenti Testuali, a loro volta segmentati in Enunciati, i quali sono composti da Unità Informative» (A. Ferrari, 2019, p. 34). Il Movimento Testuale consiste in una sequenza di Enunciati nella quale è riconoscibile un'unitarietà dal punto di vista tematico-referenziale o dal punto di vista logico. Esso è il risultato di un macro-atto di composizione testuale, e la sua segnalazione linguistica può variare a seconda del genere di testo considerato; nel caso di un testo scolastico di matematica, i confini di un Movimento Testuale possono essere segnalati da una varietà di espedienti grafici il cui fine è quello di orientare il lettore nell'individuazione di blocchi di testo definiti (Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020).

A livello qualitativo, dall'analisi del corpus si è potuto notare che i Movimenti Testuali presenti in un libro di testo di matematica fanno principalmente riferimento a due intenti comunicativi: *far sapere* qualcosa al lettore e *far fare* qualcosa al lettore. Nel primo caso si parlerà di Movimento *espositivo-esplicativo*, nel secondo di Movimento *direttivo*. A sua volta, il Movimento *espositivo-esplicativo* è stato differenziato in tre tipi, corrispondenti a differenti realizzazioni dell'intento comunicativo: il Movimento espositivo-esplicativo di tipo *dichiarativo*, che tipicamente propone una o più asserzioni; il Movimento espositivo-esplicativo di tipo *narrativo-descrittivo*, nel quale vengono approfonditi concetti attraverso descrizioni di giochi, excursus storici, inserti etimologici; infine il Movimento espositivo-esplicativo di tipo *logico-argomentativo*, cioè

> «un macro-atto che non offre semplici dichiarazioni, ma che accompagna il ragionamento del lettore nella costruzione del sapere o che comunque cerca di favorire l'interiorizzazione di esso attraverso prove, sperimentazioni (concrete o simulate) e confronti finalizzati a comprendere e a supportare un'asserzione».
>
> (Demartini, Sbaragli & Ferrari, 2020, p. 168)

Come si è detto, in questo contributo ci concentreremo solo su quest'ultimo tipo di Movimento Testuale, con l'intento di delinearne le caratteristiche, le modalità di realizzazione a livello disciplinare e linguistico, la presenza nei manuali del corpus a livello quantitativo, la sua evoluzione nel corso degli anni di scolarità. Ci concentreremo su di esso consapevoli di quanto la categoria sia scivolosa, soprattutto per i contorni sfumati che spesso assume nei libri di testo, nei quali inevitabilmente possiede simultaneamente un fine argomentativo ma anche esplicativo, ma altrettanto consapevoli di quanto essa sia fondamentale per osservare come i lettori vengano accompagnati nella costruzione concettuale. Non a caso, come si è detto, tali Movimenti appartengono alla famiglia dei macro-atti espositivo-esplicativi, tipici del discorso scientifico disciplinare offerto dai testi per la scuola. Per procedere, è prima utile affrontare in una prospettiva più ampia, seppur brevemente, il tema dell'argomentazione da alcuni punti di vista utili allo scopo dell'articolo.

3.3 L'argomentazione in chiavi interdisciplinare e didattica

3.3.1 Verso la teoria dell'argomentazione: breve introduzione storico-culturale

La storia della cultura occidentale è contraddistinta da alcuni elementi forti e caratterizzanti, che ne determinano a lungo termine i modi di vedere le cose e anche di impostare la formazione delle giovani generazioni. Tra questi elementi vi sono la retorica e la dialettica (inizialmente viste come discipline distinte, anche se complementari), le cui riflessioni rientrano attualmente all'interno degli studi che orbitano attorno alla *teoria dell'argomentazione*. I primi studi di retorica hanno origine nella Magna Grecia del V secolo a.C. grazie alla nascita di un vasto movimento filosofico che va sotto il nome di sofistica. La retorica, intesa come arte di saper parlare per convincere gli altri delle proprie ragioni (ricorrendo non per forza ad argomenti veri, ma anche solo verosimili), è uno dei capisaldi di tale movimento: mediante la carica persuasiva della parola, infatti, i sofisti hanno insegnato la morale, le leggi, i sistemi politici. A differenza dei filosofi greci precedenti, non si interessano alla cosmologia e alla ricerca dell'arché originario, ma si concentrano, piuttosto, sulla vita umana, diventando così i primi filosofi morali.

Ma sarà solo un secolo più tardi, attraverso il lavoro di sistemazione compiuto da Aristotele nell'*Organon* e nella *Retorica*, che verrà tracciato un solco imprescindibile per tutti gli sviluppi teorici successivi. Nel lavoro di Aristotele si possono distinguere diverse aree di studio: l'*analitica*, nella quale si mettono in luce i meccanismi della deduzione che parte da premesse vere per giungere a conclusioni logicamente fondate e necessariamente vere, e che andranno a costituire la base su cui si svilupperà tutto il pensiero logico-deduttivo matematico (D'Amore & Sbaragli, 2017); la *dialettica*, parallela all'analitica, ma che a differenza di questa non si occupa del necessariamente vero bensì del verosimile, ossia di opinioni, di tesi cui si aderisce con intensità variabile, ed è concepita dallo stesso Aristotele «come l'arte di ragionare partendo da opinioni generalmente accettate» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 7); infine la *retorica*, intesa da Aristotele come complementare alla dialettica, ha come oggetto il ragionamento persuasivo nei confronti di un uditorio, e insegna come si deve dire qualcosa (secondo quali schemi, seguendo quali criteri e con quali cautele) allo scopo di rendere efficace ciò che viene detto-fatto, producendo determinati effetti sull'uditore: convincerlo circa la credibilità di un'opinione, indurlo a compiere o ad astenersi dal compiere una data azione, portarlo a modificare certi suoi atteggiamenti, sentimenti ecc. (Cattani, 1994).

La tradizione retorica ebbe importanti sviluppi per tutta l'antichità classica (Mortara Garavelli, 2020), laddove il discorso persuasivo (quindi un *certo tipo* di argomentazione) rappresentava il cuore del dibattito pubblico e della vita civile[19]. In particolare, a partire dal II secolo a.C., la diffusione della cultura greca nel mondo occidentale e specificamente in quello latino determina il successo della retorica e la sua presenza nell'iter educativo e formativo delle giovani generazioni che avevano accesso agli studi (Corno, 2011; Marazzini, 2001)[20]. Dalla tradizione classica ricaviamo numerosi elementi ancora oggi significativi da considerare nella composizione di qualsiasi testo, come l'*inventio* (il

[19] La tradizione è così resistente che molti degli elementi e delle tecniche dell'"arte del dire" individuate nel mondo greco-latino sono ancora alla base degli attuali manuali di comunicazione.

[20] Basti pensare a opere come l'*Institutio oratoria* di Quintiliano (c.a. 35/40 – 96): 12 volumi rivolti a educare il futuro oratore, a cominciare dall'infanzia, tramite le tecniche e l'esperienza della migliore tradizione retorica.

reperimento dei contenuti), la *dispositio* (lo schema del discorso, l'ordine degli argomenti) e l'*elocutio* (lo stile, con le sue possibilità espressive che influiscono sulla comunicazione). Nei secoli, ad affermarsi e ad affinarsi sono stati soprattutto gli aspetti legati all'*elocutio* e nella fattispecie all'*ornatus*, cioè al *come* dire le cose e alle figure retoriche (di cui si trovano ricchissime e dettagliate tassonomie in studi recenti come Lausberg, 1949/1969, Gruppo μ, 1970/1976). Gli eccessi in questo senso hanno portato allo scadimento di certa retorica e, al suo interno, di alcune modalità argomentative, soprattutto di quelle finalizzate a far prevalere opinioni e punti di vista. Basti pensare all'irrigidimento, anche in didattica, di certi schematismi che non favorivano lo sviluppo del pensiero, ma si appiattivano sulla ripetizione stereotipa di strutture codificate: ne sono esempio estremo le cosiddette *macchine retoriche* in voga nella manualistica del '500 (una delle più note è quella proposta da Francesco Alunno nella *Fabrica del mondo* del 1548), che prevedevano schemi combinatori di parole da cui attingere per strutturare discorsi eloquenti. E una simile tendenza all'imitazione e all'appiattimento delle strategie argomentative in didattica si trova confermata anche in ambito matematico almeno fino ai primi decenni del Novecento, quando, anche tramite le nette posizioni antiretoriche dell'idealismo crociano, tutta questa tradizione viene messa in discussione. Essa verrà ripresa, in termini nuovi e critici, solo nella seconda metà del secolo sulla base di nuovi paradigmi linguistici e culturali. Questi paradigmi tentano in primo luogo di guardare all'argomentazione da un punto di vista organico, nel quale convergono tanto la tradizione retorica quanto quella dialettica. Ecco il perché dell'espressione *La nuova retorica*, sottotitolo del celebre *Trattato dell'argomentazione* del 1958 di Perelman e Olbrechts-Tyteca: con questo titolo gli autori volevano intendere che ogni argomentazione, anche quella apparentemente più impersonale, è di tipo retorico, perché «si sviluppa in funzione di un uditorio» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 8). Studi considerati oggi di base come quello già citato di Perelman e Olbrechts-Tyteca, ma anche Toulmin (1958/1975), hanno da un lato contribuito a fondare una nuova disciplina, la *teoria dell'argomentazione*, i cui oggetti di studio sono «le tecniche discorsive atte a provocare o accrescere l'adesione delle menti alle tesi che vengono presentate al loro assenso» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 6); dall'altro, dal nostro punto di vista, hanno fornito la base su cui fondare

le discussioni circa i collegamenti fra argomentazione in senso classico e argomentazione nell'apprendimento della matematica. Tali discussioni hanno infatti consentito ai didatti della matematica di riflettere sul ruolo del linguaggio naturale e dell'argomentazione nell'apprendimento di tecniche e di ragionamenti, ma anche, ad esempio, sul problema della possibilità e delle condizioni di un passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione[21].

Insomma, moltissimo è stato detto sull'argomentazione, tuttavia – soprattutto se si vuole tentare di affrontare l'argomento in modo almeno in parte nuovo e non troppo vincolato dalla tradizione e dal suo inevitabile peso – molto resta ancora da dire se si punta lo sguardo alla didattica (laddove resta una competenza trasversale condivisa dalle diverse discipline) per studiarne la resa in luoghi apparentemente secondari ma cruciali per la formazione degli allievi, come possono essere i libri di testo. Nel farlo, teniamo ovviamente conto del fatto che per affrontare l'argomentazione nei testi scolastici di matematica di oggi non è possibile prescindere dal collocarli nella tradizione culturale, didattica e manualistica cui appartengono, per capirne forse meglio certe scelte e certe impostazioni[22].

---

[21] Non è questa la sede per affrontare l'ampio tema del rapporto fra argomentazione e dimostrazione. Per i nostri scopi, sarà sufficiente ricordare alcuni passaggi, giacché discussioni in seno alla didattica della matematica proseguono da decenni e hanno prodotto una vasta letteratura. Può essere utile ricordare che Duval (1998) e Balacheff (1988) evidenziano distanze rispettivamente di tipo cognitivo e linguistico da un lato, di tipo sociale ed epistemologico dall'altro, fra argomentazione e dimostrazione. Queste innegabili differenze sono state poi rielaborate e integrate, ad esempio, all'interno del costrutto dell'Unità Cognitiva (Boero et al., 1996; Garuti, 2003; Mariotti, 2006; Martinez & Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008), con il quale si sono voluti mettere in evidenza alcuni aspetti di continuità riguardanti in particolare la generazione, durante la produzione argomentativa, della congettura, ossia degli elementi che vengono poi utilizzati durante la costruzione della dimostrazione.

[22] La prospettiva potrebbe ampliarsi se si aprisse il campo agli studi etnolinguistici (come Cardona, 2006) e etnomatematici (D'Ambrosio, 2002), e alle svariate possibilità comunicative e pragmatiche che le diverse lingue e ancor più le culture offrono, anche a livello di scelte e modalità argomentative.

3.3.2 Alcune caratteristiche dell'argomentazione matematica

Da un punto di vista etimologico, il termine "argomentazione" e il sostantivo "argomento" contengono la radice lessicale del verbo latino *arguo*, il cui significato principale è quello di *mettere in evidenza, portare a riconoscere*; ancor più precisamente, nella lingua latina ha preso forma il verbo deponente *argumentor*, «argomentare, dimostrare, ragionare», da cui, appunto, il nostro argomentare[23]. In altre parole, l'espressione indica «il processo di "aiutare" l'interlocutore a riconoscere qualcosa fornendo (direttamente o indirettamente) una opportuna giustificazione» (Rigotti & Greco, 2009, p. 4, traduzione degli autori). Detto ancora in altri termini, l'argomentazione trova dunque le sue radici nell'esigenza di giustificare una affermazione o una tesi.

Da questa definizione emergono già alcune caratteristiche dell'argomentazione. In primo luogo, l'argomentazione non coincide con la sola affermazione di qualcosa (cioè con l'esplicitazione di stati di cose, idee, opinioni, proposte ecc., ossia di una *tesi*), perché a questa va necessariamente aggiunta una giustificazione.

Ma, come afferma Duval (1998, p. 6), «nella giustificazione di una affermazione, ha importanza separare bene due operazioni: la produzione di ragioni o di argomenti, e l'esame di accettabilità degli argomenti prodotti». Dal punto di vista del loro funzionamento cognitivo, la prima operazione dipende maggiormente dalla spiegazione, la seconda dal ragionamento. Pur riconoscendo distinzioni di tipo epistemologico e cognitivo, sulle quali non entreremo in dettaglio, lo stesso Duval sostiene che le operazioni da cui è composta l'attività di giustificazione di un'affermazione siano di fatto complementari, e che spesso le giustificazioni espresse nei testi siano relativamente indifferenziate, mescolando accenni di spiegazione e accenni di argomentazione (Duval, 1998, p. 36). In quest'ottica, ci sembra giustificabile una posizione integrata come quella che assumiamo in questo contributo, e cioè di una visione nella quale un'argomentazione, soprattutto laddove viene presentata per far comprendere a qualcuno – il lettore del libro di testo e studente – un risultato matematico, può contenere al suo interno aspetti legati

[23] In greco non vi era un equivalente perfetto, ma diverse forme verbali che esprimevano diverse intenzioni in contesto.

tanto alla spiegazione quanto all'argomentazione, in un equilibrio che può essere spostato a volte più sull'uno o sull'altra.

In secondo luogo, a livello di funzione, l'intento di un'argomentazione risulta essere la *persuasione* o il *convincimento* di diversi uditori riguardo a una o più tesi: sarà «*persuasiva* una argomentazione che pretende di valere soltanto per un uditorio particolare» e «*convincente* quella che si ritiene possa ottenere l'adesione di qualunque essere ragionevole» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 31). Dovendo influenzare il particolare uditorio a cui ci si riferisce, la persuasione fa appello anche a meccanismi soggettivi, emotivi e passionali; d'altro canto, invece, la convinzione, dovendo valere per un qualsiasi essere ragionevole, mira a «superare degli ostacoli logici e razionali con dei mezzi che hanno la parvenza della logica e della razionalità, per vincere le resistenze ed i dubbi con la forza logica delle argomentazioni» (Godino, 2009, p. 98). Queste due funzioni sono entrambe presenti nell'ambito della didattica della matematica, in particolar modo considerando i libri di testo.[24] Da un lato, infatti, le argomentazioni di un libro di testo di matematica si rivolgono a un uditorio ben determinato in termini di età, e dunque anche in termini di possibilità cognitive, di capacità di attenzione, di coinvolgimento emotivo ecc.; questo comporta che chi argomenta (nel nostro caso, gli autori del libro di testo) effettui scelte il più possibile persuasive per il pubblico a cui si riferisce. Anche perché, come afferma Rousseau, convincere un bambino non serve a nulla «se non si sa persuaderlo» (Rousseau, 1898/1950, p. 171). Ad esempio, il riferimento all'esperienza reale e concreta vicina al vissuto degli allievi è particolarmente efficace dal lato della persuasione, specialmente per le fasce d'età dei più piccoli. Dall'altro lato, essendo i libri di testo oggetto di analisi di questo articolo rivolti alla matematica, disciplina la cui natura ha un carattere logico intrinseco, la persuasione potrebbe non essere sufficiente. È facile, infatti, immaginare uno studente persuaso della validità del risultato di un'argomentazione matematica senza tuttavia esserne convinto; questo significherebbe che lo studente è

[24] Poiché il contributo si occupa di argomentazioni presenti nei libri di testo di matematica, non ci siamo focalizzati sull'argomentazione in quanto discorso che si sviluppa nella pratica didattica matematica delle classi. Per una letteratura in questo senso, rimandiamo all'ampia bibliografia presente sul sito http://www.lettredelapreuve.org/.

disposto ad accettare il risultato, ma tale accettazione risulterebbe priva del carattere di adesione razionale proprio di chi ha compreso.

Ci sembra dunque sia importante che i libri di testo di matematica rivolti ai livelli scolastici da noi esaminati considerino entrambe le funzioni dell'argomentazione, la persuasione e il convincimento, senza dimenticare, dal lato dell'apprendimento, ciò che afferma Duval: «non è possibile convincere senza far comprendere» (Duval, 1998, p. 5). Ciò aggiunge un ulteriore elemento all'argomentazione proposta dai testi scolastici: di qualsiasi tipo essa sia (cioè quali che siano le modalità scelte e gli argomenti portati), essa, per essere efficace, deve essere compresa dai lettori così come devono essere compresi i suoi contenuti, intendendo la comprensione come processo cognitivo di interazione profonda col testo (ampiamente illustrato, per esempio, in Lumbelli, 2009), per cui è necessario mobilitare conoscenze pregresse (nel nostro caso, disciplinari), linguistiche, esperienziali ecc., e farle interagire col testo. Consideriamo tutti questi elementi e focalizziamoci sull'aspetto illocutivo (Austin, 1962/1987): poiché l'effetto desiderato dei passaggi logico-argomentativi dei libri di testo è che i destinatari siano persuasi e, poi, pian piano, razionalmente convinti di un sapere matematico, un'argomentazione scritta deve essere prodotta e ricevuta "felicemente", ossia il ricevente dovrebbe essere posto nella condizione di aderire alla tesi dell'emittente valutando la tesi stessa e le prove (comprendendo il linguaggio, attivando le conoscenze necessarie, facendo interagire diversi elementi richiamati ecc.). Insomma, come ricorda Sbisà (1989), i partecipanti all'atto dovrebbero implicitamente essere d'accordo, nel senso che dovrebbero essere partecipi dell'atto stesso, cioè consapevoli e attivi, altrimenti i passaggi logico-argomentativi stessi potrebbero non essere recepiti come tali: il testo non basta, se non c'è il contributo del lettore, che, a scuola, dovrebbe gradualmente essere educato a questo tipo testuale e alle sue molteplici forme e finalità.

Per poter procedere nella nostra trattazione, occorre ora addentrarsi nella forma che assume l'argomentazione del testo scritto, che ha specifiche peculiarità pragmatico-comunicative.

3.3.3 L'argomentazione nel testo scritto di matematica: la diamesia e la prospettiva funzionale

Come si è intuito dall'ampiezza del quadro teorico, parlare di argomentazione significa muoversi in un territorio vasto, con alcuni elementi costanti e ricorrenti, ma con anche svariati fattori di diversità da un'occasione a un'altra. Comunque lo si intenda, infatti, *argomentare* non significa solo inanellare parti di discorso (tesi, prove e così via), ma anche curarne l'efficacia per i destinatari, la «felicità» in termini pragmatici. Cosa che può differire non poco da un testo a un altro e da una situazione a un'altra.

Prima di passare a esempi di analisi, risulta dunque significativo richiamare almeno una dimensione fondamentale di variazione della lingua[25] (anche delle *lingue speciali* come quella della matematica): quella della *diamesia*, ossia del mezzo usato per comunicare. Ciò perché le nostre analisi si riferiscono a parti di testi scritti nelle quali la dimensione esplicativa si caratterizza in termini logico-argomentativi e non ad argomentazioni che si sviluppano nell'oralità, e che potrebbero coinvolgere un'interazione diretta e immediata con un interlocutore, tramite azioni quali la discussione o il dibattito (frequenti e utili anche in didattica). In questo senso va ricordato che i libri di testo sono dispositivi tendenzialmente rigidi dal punto di vista non solo dell'interpretazione, ma anche dell'interazione comunicativa: in essi – non essendoci alcun processo di negoziazione immediata di significato fra interlocutori –, la ricostruzione del significato è a carico esclusivo del lettore (P. L. Ferrari, 2004).

Da questa specificità di mezzo fisico-ambientale attraverso cui si svolge l'atto comunicativo derivano, ovviamente, caratteristiche linguistiche ed espressive diverse, e dunque una pragmatica specifica, in quanto la lingua scritta non è semplicemente il parlato trasferito su pagina, ma presenta proprie peculiarità. Come spiega Serianni (2003, 2010), alcune differenze sostanziali lo contraddistinguono:

- lo scritto si avvale prevalentemente del canale grafico-visivo (mentre il parlato utilizza il canale fonico-acustico): ciò è ben visibile in passaggi di trattamento e

[25] Il riferimento è ai classici lavori di Berruto (1987) in cui sono illustrate le dimensioni di variazione linguistica.

conversione tra un registro semiotico e un altro, fondamentali per l'apprendimento in ambito matematico;

- lo scritto è solo eccezionalmente "in situazione", mentre più spesso si scrive a un destinatario distante o a uno o più destinatari ideali, mentre, per contro, il parlato è tipicamente "in situazione" e presuppone un emittente che si rivolge a dei destinatari che possono interagire nel discorso (se le circostanze lo permettono);
- lo scritto è rigido, sequenziale e non dà possibilità di feedback immediati. Per contro, in un dialogo chi parla può considerare le reazioni dell'interlocutore o anche le sue difficoltà o il suo disinteresse;
- lo scritto è fruibile liberamente dal destinatario, senza obbligo di svolgimento lineare: in moltissimi casi di un testo si leggono solo le parti che interessano (cosa frequentissima nei libri di testo);
- lo scritto, almeno quello più formale e controllato, è regolato e rigido, mentre il parlato può es-sere in una certa misura maggiormente ambiguo e sollecitare di più la cooperazione dell'ascoltatore.

Tenendo sullo sfondo questi elementi, riteniamo interessante guardare alle scelte argomentative effettuate nei libri di testo richiamando anche la classificazione funzionale dei testi, di cui quello "argomentativo" costituisce un tipo. Dal punto di vista linguistico-testuale, l'organizzazione dei testi per tipi funzionali − originariamente impostata da Werlich (1982) – prevede che il tipo *argomentativo* si distingua da quelli *narrativo, descrittivo, espositivo* e *regolativo* per alcuni tratti salienti (Lala, 2011; Mortara Garavelli, 1988). Come scrive Colombo (1992, p. 477) traducendo Werlich, in generale nel testo argomentativo «il codificatore propone relazioni tra concetti o fenomeni», e, come specifica A. Ferrari (2019, p. 82), pur condividendo alcune caratteristiche essenziali, «ogni testo argomentativo presenta […] una sua struttura specifica, tanto a livello logico-semantico che a quello referenziale». Ciò significa che i contenuti possono essere i più vari e presentati in modi diversi e secondo diverse strategie, ossia attraverso una particolare organizzazione logico-semantica: ad esempio il ragionamento presentato può essere di tipo induttivo (dal particolare al generale), oppure deduttivo (dal generale al particolare), modalità entrambe presenti nei testi di matematica.

Ad ogni modo, per dirsi argomentativo, un testo o una parte di testo deve presentare alcuni tratti fondamentali (mentre altri non sono obbligatori né lo è l'ordine in cui compaiono): dovrà avere una tesi (un'idea, un'asserzione), uno o più *argomenti* a sostegno della tesi e una o più *regole generali* che garantiscano il nesso fra tesi e argomenti. Ovviamente, i Movimenti Testuali logico-argomentativi del testo scolastico di matematica non rappresentano che un sottotipo molto specifico e particolare di argomentazione; in questo senso, va richiamato quanto scrive Cortelazzo (1994, p. 4) riprendendo Dressler e Beaugrande (1984): i testi scientifici e soprattutto, pensando alle nostre analisi, alcune loro parti, sono ascrivibili al tipo argomentativo ricorrendo a «un'accezione larga di questa etichetta», intesa come caratteristica di un testo che accompagna il lettore nella costruzione e contemporaneamente nella comprensione di idee e concetti, consolidandone l'interiorizzazione tramite prove di varia natura.

Molti altri elementi che sono stati sviluppati dagli studi sulla testualità argomentativa possono essere considerati per vedere come si manifestano nei libri di testo: il tipo di *fonti* selezionate, il ricorso a esempi come base sulla quale operare congetture allo scopo di costruire concetti, l'uso di *controesempi* o di *non-esempi* che portano a un conflitto di punti di vista e conducono a un confronto di argomenti i quali giustificano affermazioni contradditorie o affermazioni contrarie su una questione. È interessante notare come queste tecniche argomentative siano molto presenti nella pratica matematica, e, soprattutto in ambito geometrico, siano utilizzati prevalentemente come supporti euristici al ragionamento. Del ruolo fondamentale dell'esempio, del non-esempio e del controesempio nella produzione di argomentazioni matematiche parlano numerosi studi a livello internazionale (Antonini et al., 2011; Balacheff, 2001; Buchbinder & Zaslavsky, 2011; Pedemonte & Buchbinder, 2011; Watson & Mason, 2006), ma va considerato che nei libri di testo sono presenti quasi esclusivamente gli esempi sui quali si basano quasi tutte le argomentazioni previste per questi livelli scolastici e in rari casi i non-esempi (cioè, per menzionarne uno, il cerchio come non-esempio di poligono), mentre non sono presenti controesempi.

Nel prossimo paragrafo presenteremo alcuni elementi linguistici inerenti specifici connettivi, che sfrutteremo in fase di analisi.

3.3.4 I connettivi e altre "spie linguistiche" nell'argomentazione

Di recente, i lavori sull'argomentazione dal punto di vista linguistico si sono fatti via via più fini, recuperando ma soprattutto arricchendo presupposti antichi. Ad esempio, alcuni studi di argomentazione degli ultimi decenni, come Lo Cascio (1991) e Iacona (2005), si soffermano sulla struttura argomentativa, sull'articolazione e sulla forza degli argomenti, e sull'uso dei connettivi, o «indicatori di forza» (così sono chiamati in Lo Cascio, 1991). Oltre alla scelta e alla concatenazione dei contenuti, anche alcune "spie linguistiche", variamente collocate nello snodarsi dell'argomentazione, possono infatti conferirle *forza*, ossia efficacia, cooperando a rendere «felice» (Austin, 1962/1987), per dirla in termini pragmatici, l'atto comunicativo. «Felice» nel senso che ottiene il risultato auspicato e diventa operativo nel contesto: nel nostro caso, significa che l'atto è costruito per presentarsi in modo efficace ai giovani lettori che stanno acquisendo concetti matematici e, al contempo, stanno prendendo dimestichezza con varie modalità comunicative disciplinari.

L'interesse per lo studio dei connettivi utilizzati nelle argomentazioni è condiviso anche dalla ricerca in didattica della matematica. Nel già citato contributo di Duval (1998), ad esempio, l'autore si domanda se sia possibile riconoscere, nella presenza di connettivi, criteri per identificare la presenza di un'argomentazione. Egli identifica tre tipi di connettivi[26]: i *connettivi combinatori*, che integrano più proposizioni in una sola superproposizione il cui valore di verità dipende dalle proposizioni di cui è costituita (ne sono esempi il *se… allora*, la *o* esclusiva, la *o*, la *e*, molto utilizzati in matematica); i *connettivi argomentativi*, per Duval tipici del discorso argomentativo, che mettono in

[26] Esistono in linguistica molte classificazioni dei connettivi, più o meno vaste e finalizzate a mettere in luce differenti potenzialità e funzioni di questa ampia e aperta classe di parole. In questo contributo abbiamo citato per esteso quella di Duval perché, pur condividendo alcuni elementi di fondo con altre tassonomie, orienta l'attenzione agli aspetti che maggiormente fanno comprendere il ruolo dei connettivi come organizzatori argomentativi in matematica. Per una tipologia dei connettivi come elementi che esplicitano le relazioni logiche di un testo a livello di rapporti fra gli eventi e di composizione testuale si rimanda a A. Ferrari (2014, 2019) e Ferrari & Zampese (2016).

rapporto due proposizioni ma non le integrano in una superproposizione, e che possono essere distinti in connettivi di co-orientamento (*anche*), e in connettivi di contro-orientamento (*ma, anche se, benché, tuttavia,…*); infine i *connettivi organizzativi*, per Duval tipici della spiegazione, che indicano lo statuto di una proposizione in rapporto ad altre proposizioni, determinando quindi il suo posto nell'organizzazione del discorso. Quest'ultimo tipo di connettivi, in particolare, consente di distinguere all'interno di ogni argomentazione quali proposizioni fungono da premesse, termini medi e conclusioni: di *conseguenza, quindi, dunque, perciò* (collegano la tesi se questa segue gli argomenti); *si sa che, in base a* (introducono la regola generale); *perché, poiché, infatti, considerato/visto che* (introducono gli argomenti); *tranne che, a meno che* (introducono una riserva, cioè la possibilità che esistano dati ed elementi che conducono a conclusioni diverse). Nonostante la presenza di questo tipo di connettivi possa orientare nel riconoscere le peculiarità di un discorso argomentativo, lo stesso Duval mette in guardia da categorizzazioni troppo nette: se è infatti plausibile ad esempio che in un'argomentazione si ritrovino più connettivi argomentativi, è d'altra parte possibile che «certe parole o espressioni possano essere impiegate come connettivi combinatori o come connettivi argomentativi […] Allo stesso modo alcune parole possono essere usate come connettivi argomentativi o come connettivi organizzativi» (Duval, 1998, p. 39).

Ciò che è stato finora brevemente ripercorso, ovviamente, è appannaggio della *teoria dell'argomentazione*, tanto in ambito linguistico quanto in ambito matematico. Nella realtà, soprattutto in quella dei testi scolastici di nostro interesse, le cose possono funzionare in modo molto diverso ed essere messe in discussione. Ad esempio, i Movimenti logico-argomentativi individuati nei testi del nostro corpus (soprattutto quelli destinati agli allievi più giovani) non per forza contengono tutti i tratti e gli elementi tipici delle movenze argomentative né si avvalgono solo delle strategie linguistiche e contenutistiche ripercorse: la cosa interessante sarà proprio addentrarsi nell'analisi per vedere le differenze, le strategie e le specificità, in modo da riuscire ad avere un quadro di che cosa possa intendersi, in senso lato, come argomentazione nel testo di matematica della scuola elementare e media, e come ciò evolva via via al progredire della scolarità verso formati più standardizzati e riconoscibili.

Fatta questa panoramica su alcune caratteristiche teoriche del tema, analizziamo quindi ora le argomentazioni secondo l'impostazione da noi adottata.

3.4 Dal *fare* all'*astrarre*

Per inquadrare la distinzione da noi scelta per i diversi tipi di Movimenti Testuali logico-argomentativi presenti nei libri del corpus, abbiamo tenuto in considerazione il passaggio avvenuto nella storia della matematica dal mondo concreto, legato al reale, al mondo astratto; evoluzione che si presenta in modo analogo nelle fasi di apprendimento degli allievi al progredire della scolarità e, di conseguenza, nelle proposte argomentative dei libri di testo. Le origini della matematica sono infatti da ricercare nelle esigenze concrete dell'uomo legate all'operare nella realtà e alla lettura del mondo circostante. È pertanto innegabile che le forme più antiche di matematica fossero legate alle necessità quotidiane, e che solo con il pensiero greco questo ancoraggio alla realtà e al fare sia andato via via ristrutturandosi, fino a determinare la caratteristica di una disciplina tendente all'astrazione, anche se mai completamente staccata dal mondo dei sensi (D'Amore & Sbaragli, 2017).

Per quanto concerne la *geometria*, il rapporto tra questo ambito della matematica e il *mondo fisico* è molto stretto e rappresenta uno degli aspetti salienti che la caratterizzano, come afferma Enriques (1906, p. 166): «[…] il difetto dello spirito matematico […] è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico». Di fatto, secondo tale autore *la geometria è la prima rappresentazione del mondo fisico*.

È soprattutto nel periodo chiamato *Crisi dei Fondamenti*, a cavallo tra il XIX e il XX secolo, che la geometria diventa una disciplina sempre più affrancata da ogni riferimento al reale, senza distanziarsene mai del tutto: i criteri essenziali di validità diventano la correttezza formale del ragionamento e la coerenza di un sistema formale (per approfondire questa evoluzione storica si vedano D'Amore & Sbaragli, 2017, 2018, 2019, 2020).

Questa esigenza del fare per poi giungere successivamente all'astrarre si riflette, come è naturale, anche nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Nella teoria evolutiva elaborata dai coniugi van Hiele (1986), riguardante lo sviluppo del pensiero geometrico, sono stati individuati dei veri e propri livelli di sviluppo che vanno dalla geometria intesa come concettualizzazione dello spazio percettivo, riguardante l'adattamento alla realtà del mondo fisico nel quale viviamo, alla geometria come teoria formale. L'ultimo livello dello sviluppo consiste nella capacità di muoversi all'interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all'interno di una data assiomatica.

L'importanza del fare, dell'agire concretamente, del manipolare oggetti nelle prime fasi di apprendimento viene ribadita dalle scienze cognitive che hanno ormai stabilito la centralità dell'esperienza fisica e corporea nel processo di costruzione, comunicazione e apprendimento della matematica. Fra le teorie più significative in questo senso ricordiamo la teoria dell'*embodied cognition* secondo la quale, per la maggior parte, gli esseri umani concettualizzano i concetti astratti matematici in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati sul sistema senso-motorio che interagisce con il mondo (Lakoff & Núñez, 2000/2005; Robutti, 2006). L'espressione *embodied cognition* significa letteralmente conoscenza "incorporata" o "incarnata" e rimanda all'idea che la nostra mente e i suoi processi cognitivi più complessi si basino e si costruiscano sulla fisicità e sui movimenti del corpo umano. Si può insomma affermare – e ciò non vale solo per i concetti matematici[27], che

> «una delle grandi scoperte della scienza cognitiva è che le nostre idee sono modellate dalle nostre esperienze corporee: non nella semplice modalità di corrispondenza uno a uno, ma indirettamente, attraverso la conoscenza del nostro intero sistema concettuale nella vita quotidiana. Il punto di vista cognitivo ci induce a chiederci se anche il sistema

[27] E la prospettiva è ormai accolta in altri fondamentali ambiti acquisizionali, come quello dell'alfabetizzazione (secondo la prospettiva aperta da Ferreiro & Teberosky, 1985), per cui per arrivare a concettualizzare l'astrazione del sistema alfabetico il bambino percorre naturalmente fasi di sviluppo che lo portano a un progressivo distacco dal reale e dall'ipotesi iniziale di una coincidenza realtà-lingua.

delle idee matematiche sia fondato indirettamente sulle esperienze corporee, e se sì, precisamente come».

(Lakoff & Núñez, 2000/2005, p. 14)[28]

3.4.2 Una possibile lettura dei Movimenti logico-argomentativi: le prove di Balacheff

Il passaggio dal fare all'astrarre è dunque uno dei nodi centrali dell'apprendimento della matematica, richiamato anche da Balacheff (1987, 1988, 2001) nell'affrontare il concetto di *prova* in matematica dal punto di vista della sua genesi. L'inquadratura scelta dall'autore[29] risulta utile per distinguere e descrivere i movimenti logici-argomentativi dei testi scolastici, soprattutto in ambito geometrico, dato che: «[la geometria] è esemplare per la forza con la quale questo dominio particolare della matematica solleva la questione del rapporto fra conoscenze empiriche e conoscenze teoriche» (Balacheff, 2001, p. 4). La distinzione proposta dall'autore verte sulla natura delle conoscenze in gioco e sul genere di relazioni che esse intrattengono con gli oggetti matematici proposti: abbiamo dunque ritenuto efficace per le nostre analisi rifarci a questa classificazione.

In particolare, nella sua trattazione Balacheff chiama *prove pragmatiche* le prove fondate sull'azione effettiva operata su rappresentazioni di oggetti matematici. Le azioni effettive sulle rappresentazioni di un oggetto geometrico possono essere sostituite dal riferimento alla rappresentazione stessa o da un'azione che prende la forma di un'esperienza mentale. In questo caso, la prova è sollecitata dal linguaggio, mezzo di evocazione delle esperienze comuni agli interlocutori. In simili prove è centrale l'ostensione ed è evidente la loro

[28] A ciò si potrebbe aggiungere, e come vedremo sarà significativo in riferimento alle parti testuali logico-argomentative proposte nei libri, un cenno al concetto di «grounded cognition» (Barsalou, 2008), che include, oltre agli stati corporei, le simulazioni e l'influsso dell'ambiente fisico e sociale in cui siamo inseriti.

[29] Pur traendo origini da lavori di più di trent'anni fa, l'impostazione proposta da Balacheff è tutt'ora ritenuta di fondamentale importanza nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, al fine di inquadrare i processi argomentativi e dimostrativi degli studenti (si vedano ad esempio Ellis et. al, 2019; Mejía-Ramos & Weber, 2020; Miyazaki et al., 2017).

peculiarità nella didattica della matematica, che, per arrivare a oggetti astratti, non può fare altro che passare attraverso rappresentazioni concrete.

Le esperienze mentali sono una delle tappe del processo che conduce alle *prove intellettuali*, ossia a prove staccate dall'azione ed espresse tipicamente attraverso delle condotte linguistiche che esprimono gli oggetti, le loro proprietà e le relazioni in gioco. Nelle prove intellettuali si tende ad abbandonare il cosiddetto *linguaggio della familiarità*, presente nelle prove pragmatiche, che porta il segno del tempo e della durata di colui che agisce e del contesto della sua azione: il linguaggio diventa sempre più *decontestualizzato*, dunque distante da uno specifico oggetto rispetto a cui vengono attuate azioni, per accedere a classi di oggetti; *depersonalizzato*, essendo separato dall'azione (potremmo anche dire deagentivizzato); *detemporalizzato*, svincolando le operazioni dalla loro data e dalla loro durata aneddotica (è un linguaggio assoluto, non legato a episodi e privo di cronologia). Assume, cioè, sempre di più tutti i tratti tipici del linguaggio specialistico della matematica inteso come discorso scientifico primario.

Come sostiene Balacheff, pur essendo le prove pragmatiche «reputate meno valide», non implicano in realtà meno conoscenze di quelle intellettuali e spesso non portano a meno generalità. Non essendo il passaggio tra queste due prove scontato, l'autore delinea quattro tipi di prove che seguono la genesi evolutiva fino alla prova per eccellenza, la dimostrazione: *l'empirismo naif, l'esperienza cruciale, l'esempio generico* e *l'esperienza mentale* (Balacheff, 1987).

L'*empirismo naif* consiste nell'assicurare la validità di un enunciato dopo la verifica su qualche caso, che rappresenta una delle prime forme di generalizzazione scelta dagli allievi e utilizzata frequentemente anche dagli studenti più grandi (Fischbein, 1982) e, come vedremo, diffusa nei libri di testo. L'*esperienza cruciale* designa una prova il cui risultato permette di scegliere in maniera netta tra due ipotesi; tale esperienza serve in alcuni casi per decidere tra una proposizione e la sua negazione. Questo tipo di esperienza viene utilizzata a livello didattico ma è praticamente assente nei libri di testo del corpus.

L'*esempio generico* rappresenta la prova più diffusa nei libri di testo e

> «consiste nell'esplicitazione delle ragioni della validità di un'asserzione mediante la realizzazione di operazioni o di trasformazioni su un oggetto esaminato non per sé stesso, ma in quanto rappresentante caratteristico di una classe. La formulazione isola le proprietà caratteristiche e le strutture di una classe restando legata al nome proprio e all'esibizione di uno dei suoi rappresentanti».
>
> (Balacheff, 2001, p. 14)

Le prove che prevedono un esempio generico rappresentano uno stadio intermedio più vicino alle prove pragmatiche o a quelle intellettuali a seconda del processo di produzione della prova, e quindi dello statuto operatorio dell'esempio utilizzato. L'importanza di questo tipo di prova risulta evidente anche dall'analisi di studenti implicati nelle attività argomentative per costruire e giustificare congetture, come sottolineato anche da alcune recenti ricerche sul ruolo dell'esempio nel fare matematica (tra le altre si vedano Antonini, 2011; Antonini et al., 2011; Pedemonte & Buchbinder, 2011). Infine, l'*esperienza mentale*, che invoca l'azione interiorizzata e si distanzia dalla realizzazione su un rappresentante particolare: questa prova segna il passaggio dalle prove pragmatiche a quelle di tipo intellettuale.

3.4.3 Dal movimento logico-argomentativo con la modalità di far "fare" al fare "astrarre"

Possiamo a questo punto interpretare quanto osservato nei libri di testo del corpus in base a ciò che è stato presentato in precedenza. Va precisato che il corpus è costituito da 142 libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana della scuola elementare e media che sono stati raccolti tra quelli editi in Italia e nei cantoni italofoni della Svizzera (Canton Ticino e Canton Grigioni). Tra questi, 129 provengono dal variegato e ampio contesto editoriale italiano; dei 13 libri di testo del contesto svizzero, 7 provengono dal Canton Ticino e 6 dal Canton Grigioni. La minore presenza di libri di testo svizzeri è dovuta al fatto che, soprattutto in Canton Ticino e in modo specifico per la scuola elementare, l'utilizzo del libro di testo in ambito didattico non è diffuso.

Nei libri di testo scolastici presenti nel corpus si è potuto rilevare che i Movimenti Testuali logico-argomentativi sfruttano tre tipi di processi cognitivi diversi tra loro, che prevedono gradi di coinvolgimento differenti:

1. Movimento Testuale con la modalità di far "fare": il lettore è chiamato a partecipare in prima persona alla costruzione del ragionamento attraverso azioni concrete di varia natura;
2. Movimento Testuale con la modalità di far "immaginare": il lettore è chiamato a immaginare azioni sugli oggetti geometrici cui ci si riferisce, senza eseguirle concretamente;
3. Movimento Testuale con la modalità di far "astrarre": il lettore è chiamato ad astrarre, ad allontanarsi dalla realtà immediata; l'attività concreta lascia il campo al pensiero astratto, per mezzo del quale si costruisce l'argomentazione.

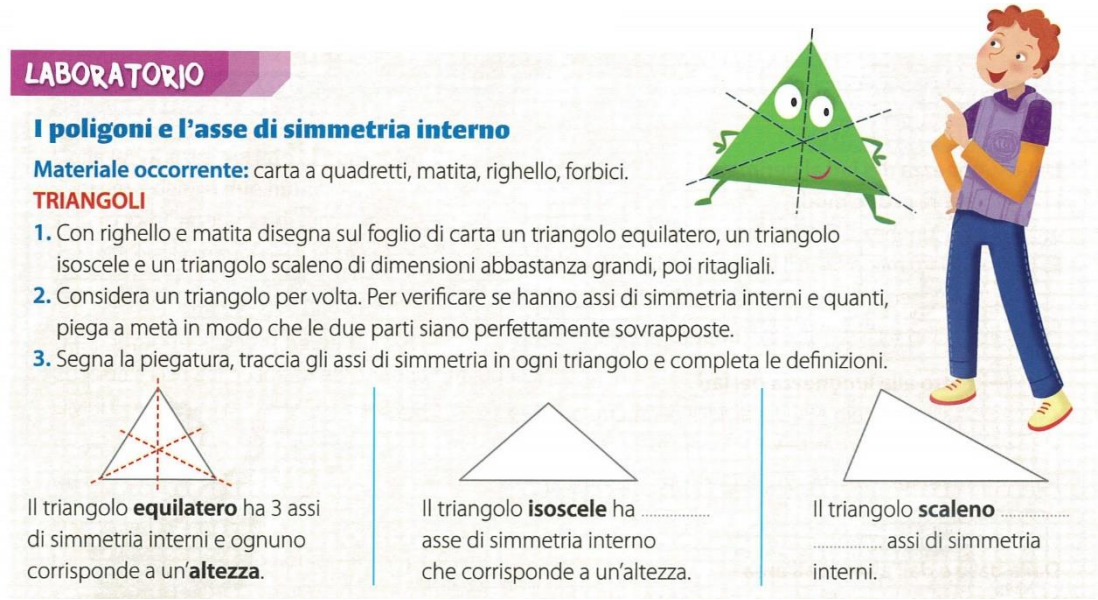
A livello di organizzazione interna degli elementi tipici dell'argomentazione, gli esempi che presenteremo propongono tutti la tesi alla fine, come punto d'arrivo. La cosa, però, non è sempre così: seppure in misura meno frequente, la tesi può anche essere presentata all'inizio seguita da prove di varia natura.

3.4.3.1 Il Movimento logico-argomentativo con la modalità di far "fare"

Una prima modalità attraverso cui i libri di testo propongono argomentazioni si concretizza attraverso Movimenti Testuali che chiedono agli allievi di fare un'azione concreta per scoprire gradualmente e attraverso almeno una prova (di cui loro stessi diventano artefici, seppure in modo guidato) un sapere che verrà enunciato in seguito. Per essere complete, queste argomentazioni necessitano dell'azione del lettore, il quale viene appunto coinvolto attraverso consegne inserite all'interno dell'argomentazione stessa. Queste consegne possono riguardare azioni da svolgere direttamente sul libro di testo (*colorare, ripassare, scrivere, tracciare, completare* ecc.), in cui sono stati volutamente lasciati spazi vuoti da riempire, come se l'argomentazione fosse un «puzzle da ricostruire, puzzle per il quale mancherebbero dei pezzi da trovare prima di assemblarli» (Duval, 1998, p. 30), oppure in altri casi riguardano consegne da effettuare al di fuori del libro di

testo (*ritagliare, costruire, disegnare, piegare* ecc.). Riportiamo di seguito un esempio che contempla entrambi i tipi di consegne.

In **Figura 2** (tratta da un libro di testo di V elementare), ad esempio, dopo aver esplicitato il "Materiale occorrente" per quella che viene indicata come attività di laboratorio, vengono descritti i passi da svolgere per scoprire la numerosità degli assi di simmetria dei triangoli equilatero, isoscele e scaleno. Il materiale occorrente va a costituire l'insieme di strumenti di cui il lettore deve disporre per svolgere una significativa attività extra-testuale, cioè per realizzare una "prova" tangibile. Seguendo quanto indicato, il lettore è chiamato a procurarsi ciò che serve, disegnare i triangoli, ritagliarli, piegarli per individuare gli assi di simmetria; infine, ormai ci si auspica persuaso e forse convinto (almeno secondo le attese del testo), è invitato a tornare ad agire direttamente sul testo completando le parti sottostanti a ogni figura, per fissare il risultato matematico generale. L'argomentazione si completa e prende forma compiuta, dunque, solo alla fine e con la collaborazione dell'allievo, che, una volta effettuata la prova e riconosciutala come parte, appunto, di un'argomentazione, completa coerentemente gli enunciati (che assumono valore di tesi).


LABORATORIO

I poligoni e l'asse di simmetria interno

Materiale occorrente: carta a quadretti, matita, righello, forbici.

TRIANGOLI

1. Con righello e matita disegna sul foglio di carta un triangolo equilatero, un triangolo isoscele e un triangolo scaleno di dimensioni abbastanza grandi, poi ritagliali.
2. Considera un triangolo per volta. Per verificare se hanno assi di simmetria interni e quanti, piega a metà in modo che le due parti siano perfettamente sovrapposte.
3. Segna la piegatura, traccia gli assi di simmetria in ogni triangolo e completa le definizioni.

Il triangolo **equilatero** ha 3 assi di simmetria interni e ognuno corrisponde a un'**altezza**.

Il triangolo **isoscele** ha ..... asse di simmetria interno che corrisponde a un'altezza.

Il triangolo **scaleno** .... assi di simmetria interni.

Fig. 2 – Esempio di movimento logico-argomentativo che prevede azioni concrete da svolgere fuori dal libro, su fogli, e dentro al libro, completando (libro 6_5 del corpus, V elementare).

Il procedere del Movimento Testuale è semplice: a partire dall'interazione con tre triangoli specifici (*un triangolo equilatero, un triangolo isoscele e un triangolo scaleno*, che il lettore dovrebbe disegnare su un foglio e poi ritagliare), si generalizza il risultato ai generici triangoli equilatero, isoscele e scaleno rappresentati nelle figure (e individuati dall'articolo determinativo *il* con funzione generica). Ci troviamo quindi davanti a un testo che invita a realizzare una *prova pragmatica*, perché lo studente è chiamato a operare concretamente sulle rappresentazioni di oggetti matematici; in modo più specifico, poiché questa prova è condotta in modo empirico su tre casi di triangoli presi singolarmente, essa richiama il livello di validazione che Balacheff chiama empirismo naif: la generalizzazione del risultato ai generici triangoli equilatero, isoscele e scaleno avviene dopo la verifica su un unico caso per classe di triangoli. Dal punto di vista linguistico, il testo fa largo uso di verbi iussivi, imperativi, che esprimono un comando ("disegna", "ritaglia", "considera", "piega" ecc.), mentre la frase "Per verificare se" è utilizzata con funzione compositiva di connettivo argomentativo per collegare l'azione di piegatura del foglio alla presenza di assi di simmetria interni al triangolo. Il fatto che i tre triangoli costruiti siano dei casi particolari non è introdotto da nessuna spia linguistica né vi sono connettivi che accompagnano alla generalizzazione: il «filo argomentativo» (*strand*, secondo Kopperschmidt, 1985) che dovrebbe generarsi fra prove particolari e asserzioni finali (le tesi) è implicito e lasciato costruire all'allievo.

Da questo caso emerge chiaramente come questa modalità di movimento testuale trae la sua efficacia non tanto dal proporre argomentazioni *tout court*, da leggere e comprendere, quanto piuttosto dallo spingere il lettore ad affiancare alla lettura del testo esperienze e atti da svolgere concretamente. In questo modo, chi legge può giungere a persuadersi del risultato, perché esso fa leva su esperienze che egli realizza personalmente, ma può anche convincersi dello stesso, poiché è portato a scoprire attivamente gli snodi logici e concettuali dell'argomentazione. Ciò mette in luce una peculiarità del libro di testo, soprattutto per i bambini e i ragazzi più giovani: se normalmente l'argomentazione è un atto che ci vede nettamente collocati in un ruolo comunicativo (o argomentiamo o siamo i destinatari di un'argomentazione), nell'esempio qui riportato il destinatario è anche compartecipe della costruzione argomentativa stessa.

3.4.3.2 Il movimento logico-argomentativo con la modalità di far "immaginare"

Questa modalità di realizzazione di movimenti logico-argomentativi propone all'allievo di seguire un'azione già svolta nel libro o di immaginare una situazione allo scopo di interiorizzare un concetto già presentato nel testo. Non si tratta dunque di un "fare" concreto, ma di immaginare la situazione proposta. L'atto dell'immaginare può essere favorito dal libro tramite diversi tipi di espedienti grafici (frecce, associazione di uso del colore, disegno delle forbici che tagliano ecc.).

In **Figura 3** (tratta da un libro di testo di IV elementare) viene proposto il caso di un movimento logico-argomentativo in cui si giunge alla formula dell'area di un rombo equiesteso a un rettangolo (del quale è prerequisito la conoscenza della formula dell'area). Nella parte di sinistra troviamo la descrizione linguistica della procedura con la quale un qualsiasi rombo può essere trasformato in un rettangolo equiesteso; nella parte di destra viene affiancata una rappresentazione grafica della procedura stessa; il tutto è seguito da un riquadro giallo, nel quale si riprende linguisticamente (in modo però più condensato) quanto appena mostrato, aggiungendo alcuni simboli e la formula simbolica dell'area del rombo.

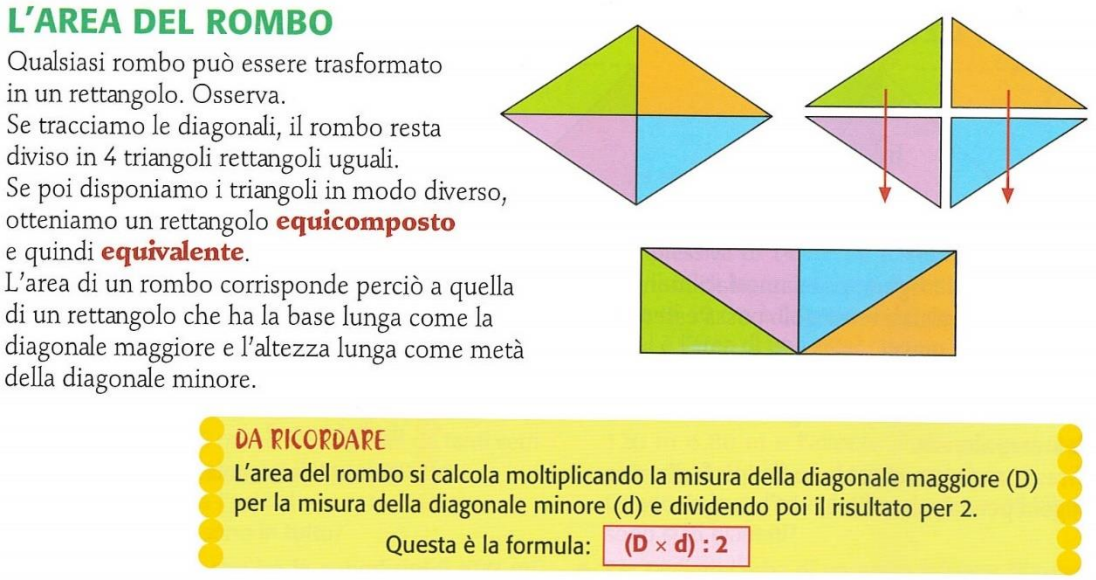


Fig. 3 – Esempio di movimento logico-argomentativo che invita a immaginare attraverso l'uso di frecce (libro c3_4 del corpus, IV elementare).

Anche questa modalità di Movimento logico-argomentativo presenta elementi di similarità con le *prove pragmatiche*, perché in essa vengono richiamate azioni da svolgere su rappresentazioni di oggetti geometrici; essi però presentano anche caratteristiche peculiari di una validazione più avanzata, che fa riferimento a quelli che Balacheff (2001) chiama *esempi generici*. Rispetto alle prove pragmatiche, nell'*esempio generico* perde di centralità l'azione concreta svolta su un oggetto specifico: esso consiste piuttosto

> «nell'esplicitazione delle ragioni della validità di un'asserzione mediante la realizzazione di operazioni o di trasformazioni su un oggetto esaminato non più per sé stesso, ma in quanto rappresentante caratteristico di una classe. La formulazione isola le proprietà caratteristiche e le strutture di una classe restando legata al nome proprio e all'esibizione di uno dei suoi rappresentanti».
>
> (Balacheff, 2001, p. 14)

Nel movimento testuale in **Figura 3**, il rombo raffigurato non è altro che un rappresentante caratteristico della classe dei rombi, e questo è particolarmente evidente se si considera l'uso del quantificatore "qualsiasi" nell'asserzione iniziale (che funge da premessa assunta come vera), che serve a chiarire che ciò che verrà detto vale per la totalità dei rombi. Nella parte testuale di sinistra troviamo numerosi altri indicatori linguistici particolarmente significativi dal punto di vista di un'argomentazione matematica. Attraverso l'uso delle protasi "se tracciamo le diagonali" e "se disponiamo i triangoli in modo diverso", si porta il lettore su un piano ipotetico, ma anche logico-deduttivo, poiché a ognuno di questi "se" corrispondono conseguenze geometriche ben precise, espresse dalle due apodosi "il rombo resta diviso in 4 triangoli rettangoli uguali" e "otteniamo un rettangolo equicomposto e quindi equivalente" (l'"allora" non è espresso, ma questi periodi sono esempi di superproposizioni). Infine, l'uso del connettivo organizzativo "perciò" indica che ci si trova di fronte alla conclusione di un ragionamento.

Presa da sola, però, la parte linguistica di sinistra non è autosufficiente ai fini di un'argomentazione convincente: soprattutto non si evince dalla sola lettura del testo il modo in cui occorre disporre diversamente i triangoli che compongono il rombo per ottenere il rettangolo. Per compensare questa necessità, essa viene affiancata da una parte figurale nella parte destra della pagina, nella quale si stimola nel lettore la visualizzazione

mentale dei procedimenti pratici descritti nella parte linguistica. Questa scelta è tra l'altro indicatrice di come il libro di testo abbia tra i suoi intenti non solo quello di condurre un'argomentazione corretta, ma di facilitarne la comprensione di chi legge attraverso l'utilizzo di vari mezzi semiotici necessari. In questo senso, l'argomentazione in un libro di testo scolastico possiede per forza di cose anche una natura esplicativa. I procedimenti pratici sono a tutti gli effetti già svolti dal libro di testo: il lettore deve solo riconoscerli attraverso un'attività di decodifica delle informazioni linguistiche e figurali, grazie alle quali si sostiene la ragionevolezza della conclusione.

Questa conclusione, cioè la formulazione della tesi con lo stile e i termini propri della matematica, compare nel box giallo come approdo finale. In esso non si ravvisano più riferimenti all'esempio generico, e la lingua perde completamente il carattere spontaneo e familiare per farsi formulazione scientifica. Quello che prima era "L'area di un rombo" (a intendere di uno qualsiasi fra gli infiniti rombi), qui diventa "L'area del rombo", con una preposizione articolata dal valore generico che introduce il rombo come oggetto assoluto, e le forme verbali diventano impersonali ("si calcola") e nominali (i gerundi "moltiplicando" e "dividendo"); compare da ultimo la formula simbolica.

Se volessimo schematizzare questo Movimento logico-argomentativo, dovremmo pensare che chiediamo alla mente dell'allievo di seguire grosso modo la struttura di ragionamento visibile nella colonna Funzione, con annesse caratteristiche:

Testo	**Funzione**	**Connotazione linguistica**	**Riferimento al disegno**
Qualsiasi rombo può essere trasformato in un rettangolo.	Premessa	Linguaggio specialistico	No
Osserva.	Richiamo al lettore	Linguaggio della familiarità	Sì
Se tracciamo le diagonali […] e quindi equivalente.	Prova	Linguaggio della familiarità e linguaggio specialistico	Sì

L'area di un rombo corrisponde perciò a quella di un rettangolo che ha la base lunga come la diagonale maggiore e l'altezza lunga come metà della diagonale minore.	Conclusione del ragionamento	Linguaggio della familiarità e linguaggio specialistico	Sì
L'area del rombo si calcola […] Questa è la formula: (D x d):2	Generalizzazione (o tesi)	Linguaggio specialistico	No

Tab. 3 – Esempio di schematizzazione di un Movimento logico-argomentativo.

3.4.3.3 Il movimento logico-argomentativo con la modalità di far "astrarre"

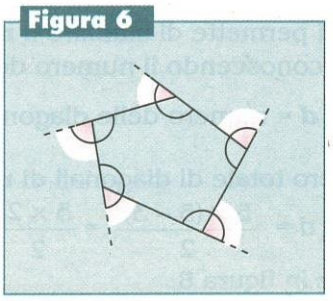
Rispetto ai precedenti, questa modalità di Movimento Testuale logico-argomentativo tende a muoversi su un piano del tutto concettuale, senza riferimenti a oggetti concreti o ad azioni mentali da seguire concretamente; il sapere viene costruito con il lettore procedendo per passi di ragionamento che richiamano unicamente aspetti teorici della matematica. In alcuni casi permangono tratti linguistici che potrebbero richiamare alla mente del lettore azioni concrete, ma che si riferiscono in realtà a stilemi e formulazioni tipiche del più volte citato *linguaggio della familiarità* di Balacheff (1987), che ancora risente degli echi di quella *geometria pratica* da cui ha preso avvio l'avventura della matematica e che ha un'importante funzione pragmatica di avvicinare il lettore al testo; in altri casi, invece, l'argomentazione rinuncia a questi tratti linguistici per focalizzarsi esclusivamente sulle relazioni fra i concetti e sulle proprietà geometriche in gioco.

Nel Movimento logico-argomentativo mostrato in **Figura 4** (tratto da un libro di testo di I media), viene proposto un esempio di strategia argomentativa più astratta delle precedenti, con la quale si vuole giungere alla tesi racchiusa nel rettangolo con bordo tratteggiato in fondo alla pagina: "La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due".

Angoli interni

Consideriamo adesso gli angoli interni ad un poligono e cerchiamo di scoprire quanto misura la loro somma.
Osserviamo che per ogni poligono è possibile costruire tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono considerato (Fig. 6): ogni angolo piatto è formato da un angolo interno e dal suo corrispondente esterno.

Figura 6



La somma degli angoli interni si ottiene quindi dalla differenza tra la somma di tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono e la somma degli angoli esterni, che sappiamo essere di 360° qualunque sia il poligono. Indicando con n il numero dei lati possiamo scrivere:

somma degli angoli interni = $n \times 180° - 360°$

ma un angolo giro corrisponde al doppio di un angolo piatto cioè:
$360° = 2 \times 180°$, quindi:

somma degli angoli interni = $n \times 180° - 2 \times 180°$ = $(n - 2) \times 180°$

N.B. Nell'ultima espressione è stata applicata la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione, così è possibile "raccogliere" il fattore 180° perché comune ai due termini della sottrazione.

In conclusione:

La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.

Osserva che, a differenza della somma degli angoli esterni, **la somma degli angoli interni non è costante ma dipende dal numero dei lati**.

Fig. 4 – Esempio di Movimento logico-argomentativo che invita ad "astrarre" (libro c4_6 del corpus, I media).

Questa modalità di movimento logico-argomentativo presenta elementi di contatto con le *prove intellettuali* di Balacheff, ossia prove «staccate dall'azione, inscritte nelle condotte linguistiche che esprimono gli oggetti e le loro proprietà, e che esprimono le loro relazioni» (Balacheff, 2001, p. 9). Queste prove non poggiano più su azioni da svolgere sulla rappresentazione dell'oggetto geometrico e il linguaggio «è segnato dall'introduzione di un lessico specifico e di simboli» (Balacheff, 2001, p. 11).

Il punto di partenza linguistico di tale movimento è, come si suol dire, da *manuale*, nel senso che ne propone i modi linguistici e le formulazioni più tipiche e ricorrenti: si dichiara

che cosa si andrà ad analizzare (con verbo alla seconda plurale – almeno grammaticalmente inclusivo di chi scrive e di chi legge – molto tipico: "consideriamo adesso gli angoli interni a un poligono") e ciò che si vuole indagare ("cerchiamo di scoprire quanto misura la loro somma"). L'architettura di questo Movimento è dunque circolare: la conclusione dà la risposta alla "scoperta" annunciata. Il lettore passa attraverso una fase osservativa del pentagono rappresentato in alto a destra (introdotto da "Osserviamo…"), che ha ancora una volta la funzione di *esempio generico*: esso è un rappresentante della classe dei poligoni e viene utilizzato per poter sostenere l'affermazione che la costruzione di tanti angoli piatti quanti sono i lati di un poligono, può essere realizzata "per ogni" poligono. Tale affermazione si snoda attraverso due enunciati separati dai due punti e connessi da una relazione di specificazione.

Il verbo "costruire" utilizzato nel secondo capoverso potrebbe richiamare nel lettore un'azione concreta attraverso un verbo familiare, ma si tratta in realtà di una forma impersonale modalizzata ("è possibile costruire"), che dematerializza l'operazione, come se la lingua stessa facesse intendere che "costruire" degli angoli non può essere che un passaggio mentale, immateriale, astratto. Ciò è confermato dal fatto che si potrebbe sostituire questa formulazione della frase con un'altra in cui non compare il verbo "costruire", senza perdere nulla in termini di completezza e correttezza.[30] Si riscontra in seguito il salto linguistico alla forma impersonale ("La somma degli angoli interni si ottiene…") nella parte di testo contenente anche il connettivo organizzativo "quindi", che, nel procedere argomentativo, colloca quanto viene detto in una relazione di consecuzione rispetto a ciò che precede (Ferrari, A., 2014).

Proseguendo la lettura, vengono poi esplicitati i passi di un ragionamento, in un crescendo di astrazione, che non poggia più sull'intreccio fra lingua e figura, bensì sull' uso combinato di elementi linguistici e simbolici, ad esempio nell'espressione, retta significativamente da un gerundio, "indicando con *n* il numero dei lati". Questo enunciato porta a concludere quanto desiderato, dapprima attraverso la formula "somma degli angoli

[30] La frase potrebbe essere sostituita ad esempio con la seguente: "Osserviamo che ogni poligono ha tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono considerato".

interni = … = (n – 2) × 180°" evidenziata in grassetto e introdotta da "quindi", e successivamente attraverso la formulazione linguistica scritta nel rettangolo dal bordo tratteggiato, preceduta dal connettivo organizzativo "in conclusione", che colloca questa parte di testo in relazione di conclusione con le precedenti.

Il coinvolgimento del lettore con il testo è minimo: egli non è chiamato a eseguire o immaginare azioni, ma solamente a seguire, quasi esclusivamente tramite la lettura del testo scritto, il ragionamento che gli si sta proponendo. In quest'ottica, potremmo dire che si fa leva maggiormente sul carattere di adesione razionale e di convincimento piuttosto che su quegli aspetti di coinvolgimento esperienziale tipicamente più incisivi dal punto di vista della persuasione. In definitiva, in questo esempio emergono un graduale distacco dal concreto a favore dell'astrazione e un uso sempre più marcato di proprietà e simboli tipici della matematica teorica: nel *nota bene*, ad esempio, si dichiarano – in una relazione marginale di aggiunta e di ampliamento rispetto al resto del testo – la proprietà aritmetica (la proprietà distributiva) e la strategia aritmetica (il "raccogliere") utilizzate per derivare l'espressione simbolica voluta.

In questi Movimenti logico-argomentativi, il distacco dal concreto si realizza in modi e forme testuali differenti, fino a giungere al quasi completo abbandono del linguaggio della familiarità, come si nota chiaramente nel seguente esempio – in cui la struttura argomentativa è evidente –, che riportiamo senza ulteriori commenti (**Figura 5**):

◆ Triangolo equilatero

Osserviamo il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza.
Il triangolo *CEB* è rettangolo perché l'ipotenusa coincide con il diametro e, inoltre, i suoi angoli acuti sono di 30° e 60°. Ricordando le applicazioni del teorema di Pitagora a questo tipo di triangolo risulta:

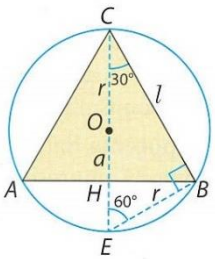
$$\overline{CB} = \overline{EB} \times \sqrt{3}$$

e quindi:

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\boldsymbol{l = r \times \sqrt{3}}$$

In generale:



La misura del **lato di un triangolo equilatero** inscritto in una circonferenza è uguale alla misura del raggio per $\sqrt{3}$.

Fig. 5 –Esempio di Movimento logico-argomentativo che invita ad "astrarre" (libro 13_7 del corpus, II media).

3.5 L'evoluzione dei movimenti testuali logico-argomentativi nel corpus

Il lavoro sistematico di ricognizione di tutti i Movimenti Testuali presenti nei libri di testo del corpus ci ha permesso di profilare alcune linee di tendenza nell'uso delle modalità argomentative individuate nei paragrafi precedenti al crescere del livello di scolarità. Poiché vi sono differenze legate alla presenza e all'uso dei libri di testo nella pratica didattica tra il contesto italiano, il contesto del Canton Grigioni e quello del Canton Ticino[31], tratteremo i dati separatamente, concentrandoci dapprima sulla situazione italiana e successivamente su quella dei due cantoni svizzeri di lingua italofona.

3.5.1 L'evoluzione delle modalità argomentative nel corpus italiano

La seguente tabella (**Tabella 4**) mostra le quantità complessive dei diversi tre tipi di Movimenti logico-argomentativi, espresse in forma numerica e percentuale, presenti nei libri di testo italiani del corpus (129 libri di testo in totale, di cui 83 di scuola elementare e 46 di scuola media):

Modalità di movimenti logico-argomentativi	**Quantità nel corpus italiano**	**Quantità nella scuola elementare**	**Quantità nella scuola media**
Modalità di far "fare"	301 / 21,8%	284 / 60,8%	17 / 1,9%
Modalità di far "immaginare"	541 / 39,1%	176 / 37,7%	365 / 39,8%
Modalità di far "astrarre"	541/ 39,1%	7 / 1,5%	534 / 58,3%

[31] Va precisato che in Svizzera ogni Cantone è autonomo nella gestione delle scelte scolastiche; tuttavia negli ultimi anni sono stati sviluppati dei piani di studio linguistico-regionali per la scuola dell'obbligo: i Cantoni della Svizzera francese hanno elaborato il Plan d'études romand (PER, https://www.plandetudes.ch/), i Cantoni della Svizzera tedesca e plurilingui, tra i quali figura anche il Canton Grigioni, il Lehrplan 21 (Piano di studio 21, https://gr-i.lehrplan.ch/index.php) e il Canton Ticino ha elaborato il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (www.pianodistudio.ch).

Totale	**1383 / 100%**	**467 / 100%**	**916 / 100%**

Tab. 4 – Distribuzione delle modalità di Movimenti logico-argomentativi nel corpus di libri italiani.

Globalmente sono stati individuati 1383 Movimenti testuali di tipo logico-argomentativo su un totale di 5783 Movimenti Testuali (comprendenti anche le altre tipologie esposte nel par. 2), corrispondente al 23,9%. I Movimenti logico-argomentativi presenti in quantità maggiore sono in ugual numero i Movimenti con la modalità di far "immaginare" e i Movimenti con la modalità di far "astrarre" (541, il 39,1%), mentre i Movimenti con la modalità di far "fare" risultano essere i meno presenti (301, il 21,8%). L'*ex aequo* tra le modalità di far "immaginare" e far "astrarre" è a tutti gli effetti una coincidenza, come emerge se si considera la ripartizione dei dati fra scuola elementare e scuola media (Tabella 2). Questa ripartizione consente anche di notare il brusco cambiamento nelle percentuali delle modalità di far "fare" e di far "astrarre" nel passaggio tra scuola elementare e scuola media: la prima modalità passa dal 60,8% all'1,9%; la seconda, per contro, passa dall'1,5% al 58,3%. Per approfondire meglio questo e altri aspetti, è significativo analizzare l'evoluzione delle tre modalità di tipi di Movimento lungo tutti gli anni di scolarità considerati, dalla II elementare alla III media.15 Mostriamo, dunque, ancora più nel dettaglio, questa evoluzione attraverso una tabella (**Tabella 5**) e un grafico a colonne (**Figura 6**):

Modalità di Movimenti logico-argomentativi	**Quantità nel corpus italiano**						
	II SE	**III SE**	**IV SE**	**V SE**	**I SM**	**II SM**	**III SM**
Modalità di far "fare"	22 / 88,0%	51 / 86,4%	127 / 52,1%	84 / 60,4%	15 / 3,0%	2 / 0,5%	0 / 0%
Modalità di far "immaginare"	3 / 12,0%	8 / 13,6%	116 / 47,5%	49 / 35,3%	235 / 47,1%	124 / 31,7%	6 / 23,1%
Modalità di far "astrarre"	0 / 0%	0 / 0%	1 / 0,4%	6 / 4,3%	249 / 49,9%	265 / 67,8%	20 / 76,9%
Totale	**25 / 100%**	**59 / 100%**	**244 / 100%**	**139 / 100%**	**499 / 100%**	**391 / 100%**	**26 / 100%**

Tab. 5 – Distribuzione delle tre modalità di Movimenti logico-argomentativi nei libri di testo dalla II SE (scuola elementare) alla III SM (scuola media).

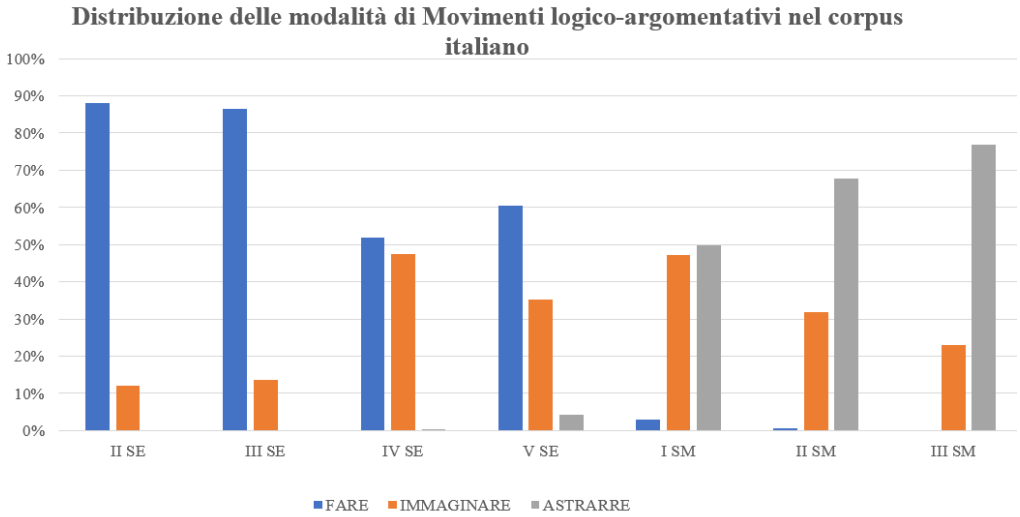


Fig. 6 – Distribuzione in forma di grafico a colonne delle tre modalità di movimenti logico-argomentativi nei libri di testo dalla II SE alla III SM.

In primo luogo, dal grafico emergono due tendenze globali interessanti: i movimenti con la modalità di far "fare" – come da prassi tipiche dei testi – decrescono drasticamente all'aumentare dell'anno di scolarità, passando dall'88,0% in II SE allo 0% in III SM. Al contrario, invece, i movimenti con la modalità di far "astrarre" crescono all'aumentare dell'anno di scolarità, passando dallo 0% al 76,9% nelle stesse classi. Questi due andamenti opposti non sono inattesi: nei primi anni di scolarità è comprensibile che la didattica prediliga l'esperienza concreta e l'azione pratica rispetto al ragionamento astratto, mentre con l'aumentare dell'età biologica e cognitiva di chi apprende si tenda a presentare la disciplina nelle sue componenti più astratte, tipiche dei modi di ragionare e dei simbolismi propri della matematica. Per quanto riguarda l'evoluzione dei movimenti logico-argomentativi con la modalità di far "immaginare", invece, si nota una certa costanza nel ricorso a questa strategia. Tutti questi risultati vanno letti tenendo in considerazione l'argomento di analisi scelto, il tema dei *poligoni*, che viene riproposto di classe in classe con ripassi e approfondimenti concettuali e di forma.

Da un'analisi più fine emerge anche come le evoluzioni delle modalità di movimenti logico-argomentativi presentino forti tratti di discontinuità in coincidenza dei cambi di adozione dei libri di testo e del cambio di ordine scolastico (passaggi dalla III alla IV

elementare e dalla V elementare alla I media); discontinuità sulla quale è importante riflettere, perché difficilmente giustificata e supportata da un'effettiva evoluzione cognitiva e di maturità degli allievi nell'arco di un'estate. Per quanto riguarda la modalità logico-argomentativa che fa "fare", si nota un brusco calo delle percentuali tra la III SE e la IV SE: dall'86,4% al 52,1%; crollo, ancora più marcato, nella transizione dalla V SE alla I SM: dal 60,4% al 3,0%. Considerando invece l'evoluzione della modalità logico-argomentativa che fa "immaginare", si nota un deciso aumento di percentuale nel passaggio dalla III SE (13,6%) alla IV SE (47,5%), come se anche in questo caso si presupponesse un rapido balzo in avanti nella capacità di staccarsi via via dal reale. Per quanto riguarda infine la modalità logico-argomentativa che fa "astrarre", nella sua evoluzione anno per anno si nota una discontinuità marcata nella transizione dalla V SE alla I SM, in cui si passa dal 4,3% al 49,9%: è proprio a questo riguardo che la didattica e i suoi strumenti meriterebbero una riflessione critica.

C'è da chiedersi se simili stacchi tra queste modalità logico-argomentative: far "fare", far "immaginare", far "astrarre" (dalla III alla IV SE e tra la V SE e la I SM), che risultano ormai sedimentate nelle prassi dei testi, siano davvero sostenibili per gli allievi e utili per una didattica che voglia costruire apprendimento e competenze; cambiamenti di modalità di ragionamento troppo bruschi potrebbero infatti concorrere all'allontanamento dalla disciplina e rendere via via più difficoltoso acquisirne i contenuti. Se si richiama la prospettiva piagetiana secondo cui il pensiero diviene pienamente formale, ossia consente di condurre ragionamenti senza la necessità di partire da un dato di esperienza, intorno ai 12 anni d'età (Lawson & Renner, 1975; Piaget, 1972), allora anche le scelte connesse alle modalità logico-argomentative meritano una riflessione in termini di gradualità e di evoluzione, in stretto dialogo con le percezioni e con le potenzialità degli allievi, soprattutto di quelli il cui pensiero rimane più a lungo ancorato alla concretezza.

3.5.2 L'evoluzione delle modalità argomentative nel corpus svizzero

Per quanto riguarda il contesto svizzero, la ricognizione dei libri di testo utilizzati nella scuola in Canton Ticino e in Canton Grigioni ha portato ad avere 13 libri in totale (5 della scuola elementare e 8 di scuola media). Va considerato che, pur essendo un campione

piccolo, esso rispecchia l'elenco complessivo dei libri in lingua italiana consigliati dagli esperti di matematica per questi Cantoni. Sono 54 i movimenti logico-argomentativi presenti in totale su tale corpus rispetto a 604 movimenti Testuali complessivi, corrispondente al 8,9%. Pur trattandosi di contesti editoriali e scolastici completamente differenti, per cui è opportuna una certa cautela nel trarre conclusioni, si nota che, globalmente, la presenza di questo tipo di movimento testuale è abbastanza inferiore nei libri in lingua italiana della Svizzera rispetto a quella presente nei libri dell'Italia (in cui, ricordiamo, la percentuale è 23,9%).

Analizzando più in dettaglio quanto avviene nei due Cantoni, va considerato che in Canton Ticino non vengono utilizzati libri di testo nelle scuole elementari, dunque il corpus è costituito da 7 libri di testo di scuola media: 3 di I SM, 3 di II SM e 1 di III SM, corrispondenti a tre titoli diversi, e rappresentano la totalità dei libri in cui si tratta il tema dei poligoni. La seguente tabella (**Tabella 6**) mostra le quantità dei tre tipi di Movimenti logico-argomentativi presenti in questi testi, espressa in forma numerica e percentuale:

Modalità di Movimenti logico-argomentativi	**Quantità nel sub-corpus ticinese**
Modalità di far "fare"	21 / 40,4%
Modalità di far "immaginare"	12 / 23,1%
Modalità di far "astrarre"	19 / 36,5%
Totale	**52 / 100%**

Tab. 6 – Distribuzione delle modalità di Movimenti logico-argomentativi nel sub-corpus di libri ticinesi.

Come emerge dai dati, le modalità di Movimenti logico-argomentativi in Canton Ticino sono distribuite diversamente rispetto a quelli di scuola media italiani, avendo una prevalenza di modalità che fanno "fare" (21 Movimenti, pari al 40,4%) rispetto alle altre due. Se poi si analizza l'evoluzione delle tre modalità lungo tutti gli anni di scolarità, dalla I alla III SM, emergono alcuni altri aspetti interessanti (**Tabella 7**):

Modalità di Movimento logico-argomentativo	**Quantità nel sub- corpus ticinese espresse in forma numerica e percentuale**		
	I SM	**II SM**	**III SM**
Modalità di far "fare"	10 / 50,0%	11 / 61,1%	0 / 0%
Modalità di far "immaginare"	8 / 40,0%	3 / 16,7%	1 / 7,1%

Modalità di far “astrarre”	2 / 10,0%	4 / 22,2%	13 / 92,9%
Totale	**20 / 100%**	**18 / 100%**	**14 / 100%**

Tab. 7 – Distribuzione delle tre modalità di Movimenti logico-argomentativi nei libri di testo ticinesi dalla I SM alla III SM.

La modalità logico-argomentativa che fa “immaginare” sembra seguire una tendenza globale di decrescita graduale che si evidenzia sia nel passaggio dalla I SM alla II SM (dal 40,0% al 16,7%), sia dalla II SM alla III SM (dal 16,7% al 7,1%). Inoltre, si notano due bruschi cambiamenti nel passaggio dalla II alla III SM: scompare la modalità logico-argomentativa che fa “fare” (dal 61,1% allo 0,0%), mentre si impone la modalità logico-argomentativa che fa “astrarre” (dal 22,2% al 92,9%). In questo caso sembra che i libri ticinesi ricalchino la stessa mancanza di gradualità riscontrata nel caso dei libri italiani, ma questa volta spostata due anni in avanti rispetto a questi ultimi, rispettando dunque maggiormente i tempi di maturazione dell’età cognitiva degli allievi. Per il salto relativo ai Movimenti logico-argomentativi che avviene dalla II alla III SM occorre ricordare che il tema viene affrontato a spirale nei diversi anni e in III SM viene affrontato come ripasso dei saperi già appresi negli anni precedenti.

Al di là dei dati quantitativi e di cambiamento negli anni, a livello qualitativo i Movimenti logico-argomentativi dei libri prodotti nei due diversi contesti nazionali sono analoghi e non mostrano particolari differenze di realizzazione. Va però almeno citata, a titolo di curiosità per la sua originalità, la scelta dell’editore Casagrande (editore di 5 dei 7 libri considerati) di avvalersi nei suoi testi di un andamento dialogico a cui non è estranea la storia della manualistica in lingua italiana, soprattutto in ambito linguistico. Ne deriva che anche i passaggi logico-argomentativi, talvolta, possono trovarsi inseriti in questo tipo di andamento trattatistico, con esiti come questo (**Figura 7**):

A proposito di angoli, devi ricordare una caratteristica importante di tutti i triangoli:

la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180^0 (corrisponde cioè a un angolo piatto).

Gero: « Io ho verificato questa particolarità disegnando e ritagliando parecchi triangoli, ai quali strappavo poi gli angoli, che incollavo ordinatamente in modo che risultassero consecutivi .»

Aba: « Io, invece, ho misurato gli angoli di alcuni triangoli e ho verificato che la somma dava sempre 180^0, pur tenendo conto di piccoli errori dovuti all'imprecisione delle misure con il goniometro. »

Fig. 7 – Esempio di Movimento logico-argomentativo che invita a "immaginare" (libro T1_6 del corpus, prima media).

Qui il movimento logico-argomentativo, che negli esempi precedenti era sempre presentato dal libro al lettore in forma statica, prende vita nelle parole dei due personaggi-guida del testo: la tesi enunciata – "la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180° (corrisponde cioè a un angolo piatto)" – è sostenuta dalle prove di disegno, ritaglio e misura resocontate in forma di discorso diretto dalle voci dei due; al lettore non resta che seguirle e simularle con la mente (non vi sono immagini annesse).

Per quanto riguarda il Canton Grigioni, infine, occorre chiarire preliminarmente che le scuole elementari durano sei anni, e non cinque come avviene in Canton Ticino e in Italia; inoltre, per ogni anno scolastico vi è un unico libro di testo di matematica in lingua italiana utilizzato in ambito scolastico. In totale sono stati dunque raccolti 5 libri di scuola elementare (dalla II SE alla VI SE) e un libro di scuola media (I SM), mentre nelle successive classi di SM non è presente questo argomento. Nei libri di testo delle elementari non sono stati trovati movimenti logico-argomentativi, mentre nel libro di I SM si è riscontrata unicamente la presenza di due movimenti logico-argomentativi con la modalità di far "fare". Si notano dunque scelte diverse di tipi di movimenti Testuali a seconda del contesto culturale.

3.6 Riflessioni conclusive in prospettiva didattica

È oggi noto che le competenze comunicative e argomentative sono considerate centrali e fondamentali in prospettiva educativa dalle diverse discipline. Detto in termini più semplici, sapersi spiegare, sapere fornire prove e motivazioni a sostegno di ciò che si pensa o di ciò che si è fatto (ad esempio di un processo risolutivo di un problema), saper cogliere e comprendere un'argomentazione efficace (e, per contro, una non efficace o contenente fallacie) e produrre un testo (orale o scritto) coerente, coeso e ben organizzato per questi fini sono attese alte, ma centrali nel mondo scolastico e non solo.

Resta tuttavia ancora poco esplorata la riflessione relativa a come lavorare su queste competenze in modo graduale, profondo e davvero efficace sul lungo termine. Se si considera che quella ad argomentare è sia un'abitudine mentale trasversale, sia un'azione concreta con specificità a seconda delle discipline, dei contesti, degli scopi ecc., allora una visione il più possibile globale delle occasioni di esposizione all'argomentazione (in senso lato) e di esercizio della stessa a scuola sin dai primi anni è un passo importante per rendersi conto delle debolezze, dei punti di forza e delle strategie più proficue. In questa visione, anche quel particolare strumento che sono i libri di testo di matematica offre uno spiraglio di indagine molto promettente, se si considera che nel campo della didattica della matematica la costruzione di competenze argomentative è essenziale, e deve essere sostenuta da efficaci competenze linguistiche generali e specialistiche.

Ma quali strumenti e occasioni diamo agli allievi per costruire tali competenze? I libri sono d'aiuto oppure continuano a parlare la loro lingua senza chiedersi se i modi che propongono sollecitano e attivano davvero i lettori? Quanto sono efficaci in termini di consapevolezza e metacognizione rispetto al macro-atto argomentativo? E poi ancora: le diverse modalità descritte e la loro evoluzione al procedere della scolarità sono realmente adeguate allo sviluppo cognitivo dei bambini e dei ragazzi e alle loro esigenze? Simili interrogativi sono emersi nello studio da noi effettuato.

L'analisi dei libri di testo ha mostrato come esistano tre modalità principali con i quali il testo propone argomentazioni al lettore. Queste tre modalità cambiano con l'evolvere degli anni di scolarità, passando dal prediligere il fare nei primi anni delle elementari fino a giungere a gradi di astrazione marcati alle medie. Per quanto riguarda il contesto italiano,

la mancanza di gradualità con la quale avvengono questi passaggi sembra significativa. Se, infatti, da un lato il libro di testo non può essere in generale considerato come l'unico supporto utilizzato dagli insegnanti per strutturare e organizzare i contenuti da trattare in classe, bisogna d'altro canto ammettere che esso è uno dei mediatori che influenzano le scelte didattiche e disciplinari operate dagli insegnanti di questi livelli scolastici (Canducci et al., 2020). Questa considerazione porta a ipotizzare che alla mancanza di gradualità dei passaggi nei libri di testo italiani da modalità argomentative del far "fare" a modalità argomentative del far "immaginare" (tra la III SE e la IV SE) e da modalità argomentative del far "fare" a modalità argomentative del far "astrarre" (tra la V SE e la I SM) possa corrispondere una mancanza di gradualità degli stessi passaggi nelle dinamiche e nei modi più diffusi di insegnamento-apprendimento interni alle prassi scolastiche. Ora, poiché non è affatto scontato che questi balzi verso l'immaginare e verso l'astrarre si affianchino a corrispondenti balzi cognitivi degli studenti che passano dalla III SE alla IV SE, e dalla V SE alla I SM, ci sembra che questa mancanza di gradualità sia poco giustificabile in termini didattici.

Rispetto al contesto italiano, in cui globalmente i Movimenti logico-argomentativi rappresentano circa un quarto dei Movimenti testuali totali, in Canton Ticino e nel Canton Grigioni emerge come i libri di testo che trattano l'argomento "poligoni" prediligano meno questa tipologia di Movimento testuale, pur essendo importante per accompagnare i ragionamenti degli allievi, e che tali Movimenti sono proposti senza troppi salti cognitivi tra una classe e l'altra; questo è indicatore del fatto che questi libri "parlano" al lettore in modo diverso.

Lo studio qui presentato non vuole dunque solo essere una ricognizione teorico-descrittiva, ma vuole offrire a insegnanti e a ricercatori interrogativi e stimoli da cui partire per sperimentare in classe, acquisendo il gusto di entrare nella proposta testuale con gli allievi, osservandola, smontandola o anche semplicemente esprimendosi su di essa, per cercare di capire quali sono le loro reali necessità e difficoltà in vista di un apprendimento che non sia banale ripetizione (quando c'è), ma vera interiorizzazione.

Capitolo 4. Inventio, dispositio, elocutio: tre lenti per l'analisi di argomentazioni nei libri di testo di geometria

Michele Canducci[1,2], Andrea Rocci[1,2], Silvia Sbaragli[1]

[1]Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI di Locarno, Svizzera

[2] Università della Svizzera Italiana, Lugano, Svizzera

«Physica ista ipsa et mathematica et quae paulo ante ceterarum artium propria posuisti, scientiae sunt eorum, qui illa profitentur; illustrare autem oratione si quis istas ipsas artes velit, ad oratoris ei confugiendum est facultatem».

(Cicerone, *De oratore*, I, 61)

È chiaro che la fisica, la matematica o le altre scienze sono proprie di coloro che le professano, ma se vogliamo che esse siano illustrate in un discorso chiaro ed efficace, bisogna rivolgersi all'abilità specifica dell'oratore.

Abstract. A partire dal corpus del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* del Fondo nazionale svizzero, viene presentata un'analisi di esempi tratti dai libri di testo di geometria in lingua italiana della scuola primaria e secondaria di primo grado. L'analisi si basa sull'applicazione delle categorie di tipo retorico classico: *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, oggi afferenti ai domini degli studi linguistici, in particolare delle teorie dell'argomentazione. Attraverso l'analisi condotta, vengono evidenziate da un lato la profondità delle riflessioni che queste lenti teoriche consentono di raggiungere nello sviscerare un testo argomentativo di matematica, dall'altro la grande varietà di scelte possibili adottate dai libri di testo, che possono avere un effetto comunicativo sul lettore-studente.

4.1 Introduzione

Questo contributo si inserisce all'interno del progetto quadriennale *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico*[32]. Il progetto ha come obiettivo l'individuazione, la raccolta e l'analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, di un corpus di libri di testo scolastici di matematica in lingua italiana della scuola primaria e secondaria di primo grado, al fine di delinearne le caratteristiche e i possibili ostacoli per la comprensione degli alunni. Si è concentrata l'attenzione sull'ambito geometrico; in particolare, il tema indagato è quello dei poligoni. Poiché tale argomento viene proposto con continuità dalla seconda primaria alla terza secondaria di primo grado, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche, abbiamo potuto contare su un bacino di libri di testo riferito a sette anni di scolarità. In questo modo si è composto un corpus, denominato DFA-Italmatica[33], sul quale è stato possibile effettuare analisi a diversi livelli, focalizzate su aspetti differenti e facenti uso di una grande varietà di approcci qualitativi e quantitativi (Sbaragli & Demartini, 2021). Queste analisi sono state condotte da un team interdisciplinare di ricercatori in didattica della matematica e in linguistica, e hanno messo in luce un panorama complesso, dal quale emerge chiaramente come le diverse scelte di tipo linguistico e testuale, effettuate dai *costruttori di senso* di un libro di testo (Bezemer & Kress, 2010), possono influenzare il lettore in fase di apprendimento della matematica[34].

---

[32] Progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica.

[33] I testi del corpus sono stati raccolti tra quelli editi in Italia e nei cantoni italofoni della Svizzera (Canton Ticino e Canton Grigioni), arrivando a comporre un corpus di 142 titoli. Tra questi, 129 provengono dal variegato e ampio contesto editoriale italiano; 13 libri dal contesto svizzero, di cui 7 provengono dal Canton Ticino e 6 dal Canton Grigioni. La minore presenza di libri di testo svizzeri è dovuta al fatto che, soprattutto in Canton Ticino, l'utilizzo del libro di testo in ambito didattico non è diffuso. Per un approfondimento dei criteri con i quali è stato costruito il corpus, si veda Sbaragli & Demartini (a cura di) (2021).

[34] Tra le tematiche trattate citiamo: gli aspetti strutturali di architettura testuale dei manuali (Demartini, Sbaragli, & Ferrari A., 2021); gli aspetti lessicali e morfosintattici dei manuali (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Demartini & Sbaragli, 2019; Canducci, Demartini, Franchini, & Sbaragli, 2019a, b; Canducci, 2020; Canducci, Demartini & Sbaragli, in stampa); gli aspetti legati al rapporto multimodale fra testo e figure nei manuali (Canducci, 2019; Canducci, Rocci & Sbaragli, in press); gli aspetti legati alle diverse modalità con le quali vengono proposti movimenti testuali di tipo argomentativo (Sbaragli, Canducci & Demartini, in stampa).

In questo contributo intendiamo condurre un ulteriore passo verso una visione sempre più integrata fra la dimensione linguistica e l'apprendimento della matematica, proponendo l'analisi di argomentazioni realizzata attraverso le categorie retoriche dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio*.

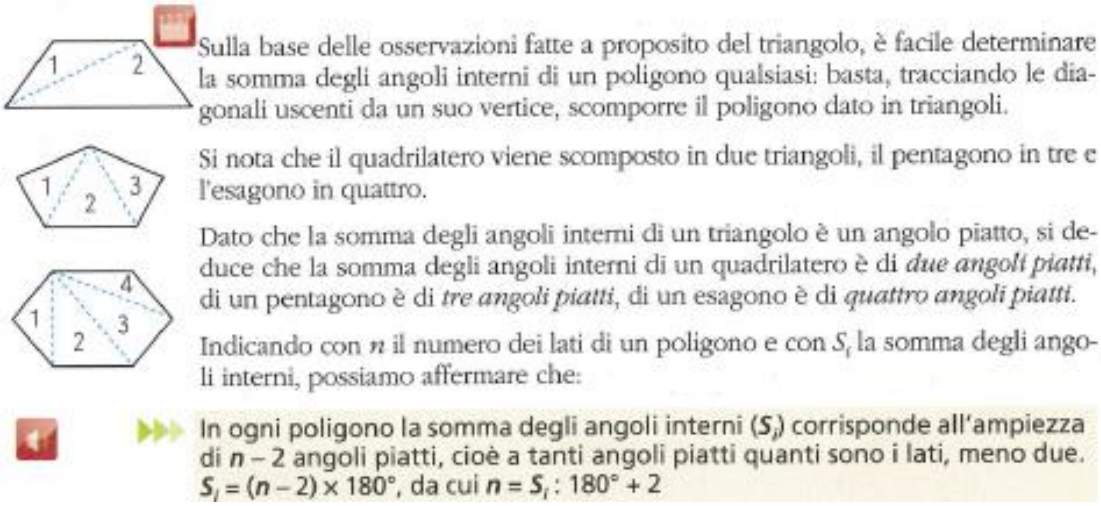
In particolare, ci si chiede se la lettura delle porzioni argomentative presenti nei libri di testo tramite queste categorie di analisi possa mettere in luce aspetti significativi per la didattica della matematica, che tipicamente non riescono ad emergere attraverso altri tipi di analisi condotte abitualmente in questo ambito di ricerca. Nel fare questo, proporremo dunque un quadro teorico derivante dal mondo della linguistica, in particolare riferito a studi di teoria dell'argomentazione, con il fine da un lato di poter dare un contributo nuovo e originale all'attuale e ampia ricerca che viene fatta oggi in didattica della matematica sul tema dell'argomentazione[35], dall'altro di rendere conto della grande varietà di scelte comunicative che possono essere effettuate nei libri di testo, e che potrebbero avere un certo effetto sui lettori-studenti.

Per affrontare questo compito, esporremo dapprima i motivi che ci hanno condotto a considerare alcune porzioni di libri di testo come argomentazioni, calandoli all'interno di un caso di studio (paragrafo 4.2); chiariremo poi alcuni aspetti relativi alle categorie di analisi che utilizzeremo (paragrafo 4.3), focalizzandoci sugli elementi che saranno utili per analizzare le porzioni argomentative dei libri di testo di matematica; analizzeremo poi in profondità tramite queste lenti di analisi il caso di studio (paragrafo 4.4) per metterlo a confronto con altre scelte presenti nei libri di testo del corpus DFA-Italmatica (paragrafo 4.5), arrivando così a trarre alcune considerazioni.

[35] Non approfondiremo in questo contributo il tema dell'argomentazione trattato nell'ambito della ricerca in didattica della matematica, in quanto focalizzato prevalentemente su un *discorso* che si sviluppa nella pratica didattica matematica delle classi, mentre ci occupiamo di porzioni testuali presenti nei libri di testo di matematica, rigidi dal punto di vista dell'interazione comunicativa con lo studente-lettore. Tuttavia queste interessanti discussioni proseguono da decenni e hanno prodotto una vasta letteratura a cui rimandiamo (si veda ad esempio http://www.lettredelapreuve.org/).

4.2 Un caso di studio: la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Presentiamo una porzione di un libro di testo italiano di matematica rivolto a studenti di prima secondaria di primo grado nel quale si accompagna il lettore a riconoscere che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono di *n* lati è pari a (*n*-2) ·180° (**Figura 8**).



Sulla base delle osservazioni fatte a proposito del triangolo, è facile determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi: basta, tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli.

Si nota che il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l'esagono in quattro.

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, si deduce che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di *due angoli piatti*, di un pentagono è di *tre angoli piatti*, di un esagono è di *quattro angoli piatti*.

Indicando con n il numero dei lati di un poligono e con S_i la somma degli angoli interni, possiamo affermare che:

In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrisponde all'ampiezza di $n - 2$ angoli piatti, cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due.
$S_i = (n - 2) \times 180°$, da cui $n = S_i : 180° + 2$

Fig. 8 – Porzione di libro di testo italiano di prima scuola secondaria di primo grado (libro 2_6 del corpus, p. 176).

Dal punto di vista matematico, la strategia con la quale si giunge al risultato sfrutta l'idea di scomporre un poligono generico di *n* lati in *n*-2 triangoli attraverso una triangolazione che consiste nel tracciare tutte le diagonali che hanno come estremo un vertice fissato. Sapendo poi che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari all'ampiezza di un angolo piatto, si inferisce che la somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati è pari a *n*-2 angoli piatti.

Ci domandiamo: di che tipo di discorso si tratta? Può essere considerata una dimostrazione matematica? Pur avendo assunto nel corso dei secoli forme diverse, le dimostrazioni matematiche posseggono una comune struttura che può essere riassunta con le parole di Balacheff (2001, p. 4): «Una dimostrazione è una successione di enunciati tale che ciascun enunciato o è un'ipotesi, o è un enunciato la cui validità è addirittura già stabilita

(teorema), o ammessa (assioma), o è dedotto da enunciati che lo precedono secondo una regola esplicita e condivisa». Seguendo questa definizione, la successione di enunciati presenti nell'esempio non può essere considerata una dimostrazione, perché se da un lato è evidente che in questa porzione di testo sia presentato un discorso che dà delle ragioni a sostegno della proposizione finale, dall'altro bisogna ammettere che si utilizzano inferenze di tipo diverso: alcune di queste sono di tipo deduttivo, come nel caso del passaggio nel terzo blocco testuale introdotto dal "dato che"; invece, lo schema globale del ragionamento proposto nello stralcio di testo segue un altro tipo di inferenza, solitamente chiamata con il termine *induzione*[36]. Questo metodo consiste nell'inferire dal particolare al generale: dopo aver verificato che una certa proprietà è valida per un certo numero di elementi appartenenti a una classe, si afferma che tale proprietà è valida per la totalità degli elementi della classe[37]. Nel nostro caso di studio, appare evidente l'utilizzo di tale metodo: in tre casi di poligoni vale la proprietà che la somma delle ampiezze dei loro angoli interni corrisponde all'ampiezza di tanti angoli piatti quanti sono il numero dei lati del poligono considerato diminuito di 2 (che corrisponde al numero di triangoli che si ottengono secondo la logica di triangolazione scelta), da ciò si inferisce induttivamente che tale proprietà vale per tutti i poligoni.

Ora, se si considera che, in generale, un'*argomentazione* può essere definita come un «processo che "aiuta" l'interlocutore a riconoscere qualcosa fornendo (direttamente o indirettamente) una opportuna giustificazione» (Rigotti & Greco, 2009, p. 4, traduzione degli autori), essa può essere interpretata dal punto di vista epistemologico come iperonimo di dimostrazione[38]: in altre parole, l'insieme delle dimostrazioni rappresenta un sottoinsieme dell'insieme delle argomentazioni, il quale sarebbe dunque formato dai due sottoinsiemi delle *argomentazioni dimostrative* e delle *argomentazioni non dimostrative*. Se nelle argomentazioni dimostrative possono comparire solo passaggi deduttivi, nelle

[36] Da non confondere con il principio di induzione matematica, che è invece un assioma dell'aritmetica di Peano con il quale si possono dimostrare, ad esempio, numerosi teoremi di aritmetica elementare.
[37] Ovviamente, questo procedimento non dà la certezza che l'affermazione finale sia vera: al più si può concludere come sia *verosimile* che la suddetta proprietà valga nella totalità dei casi in oggetto.
[38] Il termine "iperonimo" indica un'unità lessicale di significato più generico ed esteso rispetto a una o più unità lessicali che sono in essa incluse. Ad esempio, "fiore" è un iperonimo di "garofano".

argomentazioni non dimostrative possono comparire processi inferenziali diversi, quali, ad esempio, anche di tipo induttivo (o abduttivo).

In definitiva, possiamo interpretare la porzione di testo qui presentata come argomentazione, in particolare come argomentazione non dimostrativa, sviluppata attraverso passaggi inferenziali non solo deduttivi, tenendo anche conto che l'intento di ogni argomentazione è in generale di convincere un uditorio riguardo alla plausibilità di una certa tesi. Da questo punto di vista, ci sembra infatti che, laddove i limiti dovuti alla giovane età dei discenti non consentano un approccio pedagogico di tipo esclusivamente dimostrativo ai risultati matematici, tra gli intenti di un libro di testo di matematica possa (anzi forse debba) rientrare anche il convincere il lettore riguardo alla plausibilità di alcuni fatti matematici, tramite argomentazioni più o meno dimostrative.

Fatta questa premessa, rivolgiamo ora l'attenzione al chiarire alcuni aspetti teorici relativi alle categorie di analisi che utilizzeremo. Nel farlo, ci porremo in una prospettiva contemporaneamente diacronica e sincronica, nella quale intrecceremo le riflessioni degli studi classici di retorica con quelle relative ai moderni studi della *teoria dell'argomentazione* e di altre discipline del linguaggio.

4.3 L'argomentazione come discorso di ragione e persuasione

Dal punto di vista dei contenuti e delle problematiche a cui si rivolge, la teoria dell'argomentazione è una disciplina antica, che trae origine nella pratica sofistica, nella dialettica socratico-platonica, nell'opera di Aristotele, e in seguito negli studi retorici dell'epoca romana. Imprescindibile per gli sviluppi fino alla modernità è la distinzione tra dialettica e retorica, operata principalmente da Aristotele: la *dialettica* si occupa del ragionamento attorno al verosimile[39], di tesi cui per forza di cose si può solo aderire con intensità variabile, ed è concepita dallo stesso Aristotele «come l'arte di ragionare partendo da opinioni generalmente accettate» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 7); la *retorica*, complementare alla dialettica, ha come oggetto il discorso persuasivo

[39] La dialettica è quindi diversa dall'analitica, nella quale si mettono in luce i meccanismi della deduzione che parte da premesse vere per giungere a conclusioni logicamente fondate e necessariamente vere.

nei confronti di un uditorio, e insegna «come si deve dire qualcosa − secondo quali schemi, seguendo quali criteri, con quali cautele − perché ciò che viene detto risulti un mezzo efficace per consentire il fine del nostro dire-fare, cioè la produzione di determinati effetti sull'uditore (convincerlo circa la credibilità di un'opinione, indurlo a compiere o ad astenersi dal compiere una data azione, portarlo a modificare certi suoi atteggiamenti, sentimenti ecc.)» (Cattani, 1994, p. 166). Si semplifica la questione, ma non si sbaglia di molto, affermando dunque che se la dialettica è maggiormente focalizzata sugli aspetti di ragionevolezza del discorso, la retorica è più spostata sull'efficacia persuasiva dello stesso. Questa caratterizzazione è sostanzialmente rimasta tale per duemila anni, fino all'avvento di quella che oggi è conosciuta come *teoria dell'argomentazione*, espressione con la quale si indica un filone di riflessioni nato a metà del XX secolo, e che si distingue dagli studi classici principalmente per il tentativo di guardare all'argomentazione da un punto di vista organico, nel quale convergono tanto la tradizione retorica quanto quella dialettica[40]. Ecco il perché dell'espressione *La nuova retorica*, sottotitolo del celebre *Trattato dell'argomentazione* del 1958 di Perelman e Olbrechts-Tyteca: con questo titolo gli autori volevano intendere che ogni argomentazione, anche quella apparentemente più impersonale, è di tipo retorico, perché si sviluppa in funzione di un effetto sulla realtà (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 8). Con questo approccio è possibile guardare alle pratiche e ai discorsi argomentativi attraverso una lente pragmatica (Van Eemeren, 2015) che accompagna alla imprescindibile dimensione di ragionevolezza quella di efficacia persuasiva, arrivando a parlare di «ragionevolezza dell'impegno persuasivo» (Rocci, 2017), cioè di una posizione in cui si recupera «l'idea che la persuasività sia un reale contributo alla ragionevolezza, sia necessaria ad una comunicazione pienamente ragionevole», in cui chi argomenta «non ritiene solo che sia possibile essere ragionevoli e persuasivi, ma anche che non sia possibile essere pienamente ragionevoli senza un impegno persuasivo, un impegno ad aver cura delle circostanze che favoriscono nel mio interlocutore l'uso della ragione» (Rocci, 2017, pp. 102-103).

[40] Ricostruire storicamente i passaggi, tutt'altro che banali, che hanno portato dalla visione tradizionale legata alla dialettica e retorica classica alla moderna *teoria dell'argomentazione*, è un'impresa che esula dagli scopi di questo contributo. Per chi avesse intenzione di approfondire, rimandiamo a van Eemeren (2013) e Rigotti & Greco (2019).

In altre parole, chi argomenta, sia esso un politico, un giornalista, un avvocato, un insegnante o, come nel nostro caso, un libro di testo di geometria, dovrebbe saper utilizzare gli strumenti retorici non per manipolare, ma per rendere la propria argomentazione davvero pragmaticamente ragionevole, cioè passibile di essere accolta pienamente da un interlocutore invitato a coglierne la *ratio*. I moderni studi di comunicazione e di argomentazione si focalizzano proprio su questo punto, cioè sul rapporto che c'è tra la dimensione di correttezza dialettica[41] e la dimensione dell'efficacia comunicativa di un discorso. È in questa delicata sinergia che entrano in gioco alcune delle categorie della retorica classica e moderna quali sono l'*inventio*, la *dispositio* e l'*elocutio*, delle quali parleremo, per forza di cose in modo esplorativo, non enciclopedico[42], nel prossimo paragrafo, cercando poi di applicarle alle porzioni di libri di testo di geometria.

4.3.1 Inventio, dispositio, elocutio

La tradizione retorica latina[43], che molto deve agli studi retorici greci precedenti, suddivide l'arte dei discorsi oratori in cinque parti: *inventio*, *dispositio*, *elocutio*, *memoria* e *actio*. Se ancora oggi, nei nuovi studi di retorica, si utilizzano sostanzialmente queste etichette applicate all'organizzazione del discorso argomentativo e ai suoi componenti su vari livelli (tematico, stilistico, sintattico, prosodico, ecc.), resistendo dunque all'indebolimento delle impalcature su cui poggiava l'intero sistema classificatorio, è perché «evidentemente tali etichette servono ancora a designare fatti che oggi si analizzano con strumenti del tutto diversi da quelli che un tempo erano serviti per la costruzione delle impalcature» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 80).

Nella *Rhetorica ad Herennium* le cinque sezioni dell'arte del dire sono definite come segue:

> «L'invenzione [*inventio*] è la capacità di trovare argomenti veri o verosimili che rendano la causa convincente.

[41] La correttezza dialettica di un'argomentazione si sviluppa sul piano logico, ovviamente, ma anche extralogico, se si pensa ad esempio al fatto che alcuni argomenti possono essere ammessi o non ammessi a seconda del contesto in cui vengono presentati.

[42] Per chi intendesse approfondire questi aspetti consigliamo Mortara Garavelli (1988/2020).

[43] Questa tradizione si rifà principalmente all'opera di Cicerone (il *De Inventione* e il *De Oratore*), Cornificio (*Rethorica ad Herennium*) e Quintiliano (*Institutio Oratoria*).

> La disposizione [*dispositio*] è l'ordinamento e la distribuzione degli argomenti; essa indica il luogo che ciascuno di essi deve occupare.
> L'eloquio [*elocutio*] è l'uso delle parole e delle frasi opportune in modo da adattarsi all'inventio.
> La memoria [*memoria*] è la tenace presenza nel pensiero degli argomenti, delle parole e della loro disposizione.
> La dizione [*actio*] è la capacità di regolare in modo gradito la voce, l'aspetto, il gesto»
>
> (Rhetorica ad Herennium, I, 2, 3).

Nel momento in cui il discorso non è presentato nella variazione diamesica dell'oralità, bensì dello scritto, le sezioni della retorica si riducono sostanzialmente alle prime tre, perché la *memoria* e l'*actio* «riguardano l'esecuzione orale di discorsi scritti per essere recitati (memorizzati o anche letti)» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 84), e vengono dunque trascurate nelle trattazioni dedicate alla composizione scritta. In termini attuali, gli ambiti di interesse delle tre categorie dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio* non si discostano molto da quelli individuati dagli antichi. Nei prossimi paragrafi cercheremo di approfondirle, individuandone le caratteristiche utili ai nostri scopi e fornendo, laddove sarà opportuno, alcuni esempi di declinazione in ambito matematico.

4.3.1.1 L'inventio: il reperimento degli argomenti

L'*inventio* riguarda la progettazione del discorso persuasivo: si occupa cioè di reperire e scegliere tipologie di prove e argomenti, che rendano convincente la tesi cui si vuol giungere.

Da un punto di vista tanto classico quanto moderno, in questa sezione si affrontano i tipi di ragionamento e la tematica dei *tòpoi* (*loci* in latino, *luoghi* in italiano). Nella sistemazione aristotelica dell'*inventio*, ci si sofferma in particolare sulle strutture tipiche dell'argomentazione quali sono l'*esempio* e l'*entimema*.

Per Aristotele, l'*esempio* «rappresenta l'analogo retorico dell'induzione […] poiché consiste nel dimostrare, sulla base di molti casi simili, che le cose stanno in un certo modo»

(Piazza, 2015, p. 115). Nella rielaborazione moderna dell'*esempio*, Perelman e Olbechts-Tyteca (1958/2013) lo considerano come uno dei tre tipi di argomenti che si basano sul 'caso particolare', insieme all'*illustrazione* e al *modello*: la descrizione di un fatto è un *esempio* quando serve a dare fondamento a una regola; assume il carattere di un'*illustrazione* quando rafforza «l'adesione a una regola riconosciuta e ammessa, fornendo dei casi particolari che chiariscono l'enunciato generale» (Perelman & Olbrechs-Tyteca, 1958/2013, p. 389); il *modello*, invece, corrisponde all'esempio e all'illustrazione nell'ambito dell'agire pratico, essendo «l'insieme dei comportamenti (o degli attributi di un ente qualsiasi) su cui si può fondare o coi quali si può illustrare una regola generale di condotta» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 108). Materia dell'*inventio* riferita al 'caso particolare' è, com'è naturale, anche la scelta di quali e quanti esempi proporre all'uditorio: infatti da un lato si tratterà di scegliere la tipologia di esempio più opportuna in funzione dell'uditorio cui ci si riferisce, dall'altro di decidere quanti esempi proporre a sostegno di una tesi non dimenticando che dal punto di vista della retorica classica «il giusto mezzo tra i due opposti eccessi, che sono il dire troppo o troppo poco, si otterrà con l'esporre "quanto bisogna" e "quanto basta": il necessario e sufficiente» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 95), e questo vale in generale per tutte le parti del discorso persuasivo.

Per quanto riguarda l'*entimema*, invece, Aristotele lo definisce in questo modo: «esso è quando, date certe premesse, risulta per mezzo di esse qualcosa di altro e di ulteriore per il fatto che esse sono tali o universalmente o per lo più» (Ret., I, 2, 1356b). L'*entimema* è l'analogo retorico del sillogismo logico: se quest'ultimo, partendo da premesse necessariamente vere, dà come risultato una verità inconfutabile, l'entimema giunge a conclusioni probabili e confutabili, poiché si basa su premesse verosimili, ma non necessariamente vere. Così come i sillogismi, gli entimemi sono strutturati secondo la terna *premessa maggiore*, *premessa minore* e *tesi*. Ora, generalmente, quando si vuole convincere circa la validità di un'affermazione, l'indagine volta al reperimento delle proposizioni già accettate o accettabili per l'uditorio, che possano essere pertinentemente invocate come premesse, costituisce il cuore dell'*inventio*. Per facilitare questo sforzo, per aiutare cioè chi deve argomentare nella ricerca di premesse utili a sostenere la tesi

conclusiva, tutti gli studi retorici da Aristotele in poi hanno cercato di raggruppare, suddividendolo in categorie, il materiale utile poter trovare più facilmente argomenti in caso di bisogno. Queste categorie, già citate in precedenza, definite da Cicerone e Quintiliano come magazzini di argomenti, vengono chiamate in greco *tòpoi*, in latino *loci*, in italiano *luoghi*. In altre parole, i luoghi sono «le fonti a partire […] dalle quali l'oratore costruisce le sue argomentazioni. Si tratta di schemi argomentativi, e non di argomenti già compiutamente formulati, che vengono applicati ai casi specifici e ai quali possono venire ricondotti i singoli entimemi» (Piazza, 2015, p. 65).

Un esempio classico di luogo è quello che Aristotele chiama 'del più e del meno': «se non si può attribuire un predicato alla cosa a cui più apparterrebbe, è evidente che non lo si può attribuire alla cosa a cui meno apparterrebbe»; da questo luogo egli ricava l'entimema «se neppure gli dei sanno tutte le cose, ancor più difficilmente le sapranno gli uomini» (Ret., II, 23, 1397b). Altri esempi classici di luoghi sono quelli che rientrano nella categoria 'del genere e della specie', di cui un esempio è la seguente affermazione di carattere induttivo: «se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G»; da questo luogo si possono ricavare numerosi entimemi; esso è utilizzato, come vedremo, nell'argomentazione matematica.

Nei secoli di storia della retorica, sono state prodotte numerose possibili classificazioni dei luoghi. Non è questa la sede per trattare le varie catalogazioni e distinzioni presenti nei diversi periodi storici[44], non solo perché l'impresa richiederebbe da sola sforzi che esulano dai fini del presente contributo, ma anche perché un elenco completo di tutti i luoghi utilizzabili in un'argomentazione è difficilmente realizzabile (Perelman & Olbrecths-Tyteca, 1958/2013, p. 93). In questo lavoro segnaliamo il tentativo di organizzazione proposto in Rigotti & Greco (2019), che presenta il vantaggio di tentare un equilibrio tra la specificità e la precisione, ma anche l'eccessiva lunghezza, delle liste di luoghi proposte da alcuni studiosi (ad esempio Walton, Reed & Macagno, 2008), e la sintesi e duttilità, ma anche la spesso estrema condensazione, di altre (ad esempio Whately, 1828/1963)[45].

---

[44] Per un interessante approfondimento riguardante le varie strutturazioni di luoghi avvenute nel corso della storia, rimandiamo a Rigotti & Greco (2019).

[45] Le riflessioni e le proposte presenti in Rigotti & Greco (2019) fanno riferimento a un metodo di analisi dell'argomentazione – *Argumentum Model of Topics* (AMT) – sviluppato all'interno dell'Istituto di

4.3.1.2 La dispositio: l'organizzazione del discorso

La *dispositio* riguarda l'organizzazione del discorso persuasivo; essa si occupa dei vari modi con cui disporre gli argomenti in modo che il discorso risulti efficace e persuasivo. Nella retorica tradizionale la *dispositio* riguardava tre livelli:

1) la partizione dell'intero discorso e di singole sezioni;
2) l'ordinamento dei contenuti all'interno di ciascuna parte;
3) l'ordine delle parole nella formulazione delle idee.

Per quanto riguarda il primo livello, classicamente la divisione persuasiva del discorso pubblico era composta da quattro parti: *esordio* (l'inizio, il preambolo del discorso, nel quale può venire anche esposta la *quaestio*, cioè l'argomento specifico da trattare), *narrazione* (l'esposizione dei fatti), *argomentazione* (il cuore del discorso persuasivo, in cui si adducono le prove), *epilogo* (la conclusione del discorso). Questa suddivisione è semplificata dallo stesso Aristotele, il quale afferma che «le parti del discorso sono due: è infatti necessario esporre il fatto di cui si parla e il dimostrarlo» (Ret., III, 13, 1414a). Anche Perelman & Olbercths-Tyteca (1958/2013, p. 533) fanno notare che, in un discorso espositivo-dimostrativo, quale è ad esempio quello dei trattati di geometria, le parti del discorso si riducono solitamente alla prima e la terza (eventualmente anche con ordine invertito).

Per quanto riguarda il secondo livello, Piazza (2015, p. 161-162) fa notare che per Aristotele «l'ordine con cui si espongono gli entimemi ha […] un peso nella persuasività complessiva del discorso e lo stesso vale, precisa Aristotele, per la quantità. Un eccesso di sillogismi non solo indebolirà l'impatto emotivo ma andrà anche a scapito sia della chiarezza sia della stessa credibilità dell'oratore». Nella visione retorica classica si riteneva che, nel caso di argomentazioni multiple, non concatenate,[46] fossero tre i modelli possibili di disposizione dei contenuti: *ordine crescente*, nel quale si incomincia dagli

argomentazione, linguistica e semiotica (IALS) dell'Università della Svizzera Italiana di Lugano. Tale modello consente di portare alla luce le varie componenti che entrano in gioco in una qualsiasi inferenza argomentativa; molto affascinante è vedere come questo modello possa essere applicato anche per analizzare dimostrazioni matematiche, come mostrato in Bellucci & Blotti (2017) e Maggi (2017).

[46] Le argomentazioni multiple sono argomentazioni che prevedono più argomenti coordinati e direttamente operativi a sostegno di una stessa opinione.

argomenti deboli per lasciare in ultima posizione quelli più forti, con il rischio però che gli ascoltatori siano sfavorevolmente disposti fin dall'inizio; *ordine decrescente*, nel quale si procede all'opposto presentando per primi gli argomenti più forti e mettendo quelli meno convincenti in secondo piano, con il rischio però che si produca nell'ascoltatore un'impressione sfavorevole a causa del fatto che le ultime cose ascoltate siano le sole a rimanere a mente; *ordine omerico o nestoriano*, il più raccomandato, nel quale si pongono gli argomenti più solidi all'inizio e alla fine, distribuendo nel mezzo le ragioni meno forti. Al di fuori di questi tre modelli, che riguardano la disposizione degli entimemi in un discorso persuasivo, Aristotele tratta gli esempi, affermando che occorra «qualora se ne posseggano, servirsi di essi come testimonianze, usandoli come epilogo per gli entimemi: infatti se sono anteposti danno l'impressione di un'induzione, e per i discorsi retorici l'induzione non è appropriata se non in pochi casi, se sono detti a conclusione invece fungono da testimonianze, e la testimonianza è in ogni caso persuasiva» (Ret., II, 20, 1394a). Nella sistemazione in 'casi particolari' di Perelman e Olbrechts-Tyteca, questo condurrebbe ad affermare che, nei discorsi persuasivi, l'illustrazione è più efficace dell'esempio; in realtà, se si considera che l'approccio moderno alle varie tecniche argomentative si rifiuta di considerare l'argomentazione come un discorso che trova in sé stesso la sua struttura ideale (l'efficacia infatti dipende dal particolare uditorio a cui ci si rivolge) allora occorre concludere che «devono essere le esigenze dell'adattamento all'uditorio a guidare nello studio dell'ordine del discorso» (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1958/2013, p. 547).

Quanto all'ultimo punto, infine, quello relativo cioè alla disposizione delle parole nella formulazione delle idee, esso presenta forti intrecci con la fase dell'*elocutio*, ma può essere interessante ricordare brevemente che esistono forme 'non marcate' e forme 'marcate' di disporre le parole. In breve, una forma 'non marcata' rappresenta uno standard linguistico, un uso comune della disposizione delle parole che non presenta elementi che catturano particolarmente l'attenzione di chi legge o ascolta, risultando per certi versi neutrale e appropriato alla maggior parte dei contesti. Una forma 'marcata' è al contrario caratterizzata da una scelta non di default, che presuppone un'intenzione di enfatizzazione da parte di chi la usa, e che risulta meno scontata e non neutrale. Ad esempio, in Rocci

(1996) si fa notare che nel sintagma nominale italiano gli aggettivi possono tanto precedere quanto seguire il nome, ma l'ordine 'non marcato' prevede tipicamente che l'aggettivo venga dopo il nome (la frase "la penna rossa!" è generalmente più neutrale e 'non marcata' di "la rossa penna!").

4.3.1.3 L'elocutio: scelta della forma linguistica del discorso

L'*elocutio* riguarda il modo, lo stile con il quale viene presentato il discorso argomentativo: si occupa di dare forma linguistica alle idee in modo che risultino il più efficaci possibile.

Tradizionalmente, il materiale linguistico oggetto di elaborazione nell'*elocutio* è suddiviso in *parole singole* e *connessioni di parole*; per ciascuno di questi due gruppi vengono esercitate le quattro qualità (*virtus* in latino) dello stile oratorio: l'*aptum*, ovvero l'appropriatezza, che corrisponde al requisito di un discorso di essere conforme, che si convenga cioè alle specifiche circostanze e agli scopi nel quale viene prodotto; la *puritas*, ovvero la correttezza lessicale e grammaticale, che si fonda sul rispetto di un'ideale di integrità della lingua; la *perpiscuitas*, ovvero la chiarezza, la nitidezza del discorso, necessaria affinché esso sia comprensibile; infine l'*ornatus*, ovvero l'eleganza, la bellezza derivante dall'uso opportunamente regolato di mezzi e ornamenti linguistici rappresentati dalle figure retoriche.

Per i nostri scopi è utile approfondire, seppur in modo non esaustivo, il tema della chiarezza espositiva nell'*elocutio*, cioè la *perspicuitas* latina. In primo luogo occorre osservare che l'essere chiaro e comprensibile è una qualità soggetta alla valutazione del particolare uditorio cui il discorso si riferisce. In effetti, come osserva Mortara Garavelli, «diversamente dalla *puritas*, per cui esisteva una base grammaticale obiettiva per riconoscere ciò che era vietato e ciò che era permesso, la *perspicuitas* e i suoi contrari venivano definiti, dalla precettistica dell'arte oratoria, in base al criterio principe dell'adattamento all'uditorio» (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 192).

Il massimo difetto di chiarezza si ha quando il discorso risulta totalmente oscuro e incomprensibile, ad esempio perché composto in una lingua ignota all'uditorio. Se ci mettiamo nell'ottica dell'apprendimento della matematica, apprendimento che è costituito

anche dall'imparare termini ed espressioni del suo linguaggio specialistico (Lavinio, 2004), può ad esempio accadere, soprattutto nei livelli iniziali di scolarità, che l'alunno senta un discorso o un testo come oscuro a causa della non conoscenza di alcune delle parole che vengono usate. Al di là di questo estremo, le oscurità parziali del discorso possono riguardare la presenza di passaggi impliciti, oppure le due categorie dell'ambiguità semantica e dell'ambiguità sintattica. La prima riguarda la presenza di termini o di costrutti grammaticali che possono essere interpretati in modi diversi, qual è il caso delle parole polisemiche[47] come "angolo", usato in matematica per indicare un ente geometrico, nella lingua comune per indicare, ad esempio, il punto di incontro di due o più spigoli di una parete. La seconda riguarda quelle frasi passibili di più interpretazioni e nasce dalle relazioni tra le parole e le componenti sintattiche di una frase; ad esempio, la frase «I poligoni regolari hanno tutti i lati e tutti gli angoli uguali», presenta un ambiguità sintattica, perché la parola "uguali" posta alla fine potrebbe essere intesa nel senso di "lati e angoli uguali fra loro", cosa che tra l'altro potrebbe generare confusione nella mente di chi legge, considerando che non ha senso mettere in relazione di uguaglianza due entità diverse quali sono i lati e gli angoli di un poligono.

Quanto all'eccesso opposto, ovvero alla ricerca esagerata di chiarezza, essa è variabile e sostanzialmente dipende dai tipi di discorso: un buon esempio è quando il discorso risulta pedante a causa di precisazioni superflue, perché l'uditorio è già esperto del tema di cui si sta trattando.

4.3.2 Breve digressione multimodale

Un ultimo punto da dover trattare prima di addentrarci nell'analisi, vista la natura dei testi di cui ci occuperemo, riguarda il fatto che le sopra esposte categorie dello studio di un discorso possano essere applicate nel caso di testi multimodali, nei quali cioè sono presenti differenti *modi semiotici*, non solo di tipo linguistico: immagini, scritture, simboli, elementi grafici di varia natura. Oggigiorno, infatti, il testo è raramente presentato nella

[47] Uno studio di questi aspetti è presentato in Demartini, Fornara & Sbaragli (2020), in cui si sono messe in luce le problematiche didattiche relative alla presenza di parole polisemiche nell'apprendimento di concetti matematici.

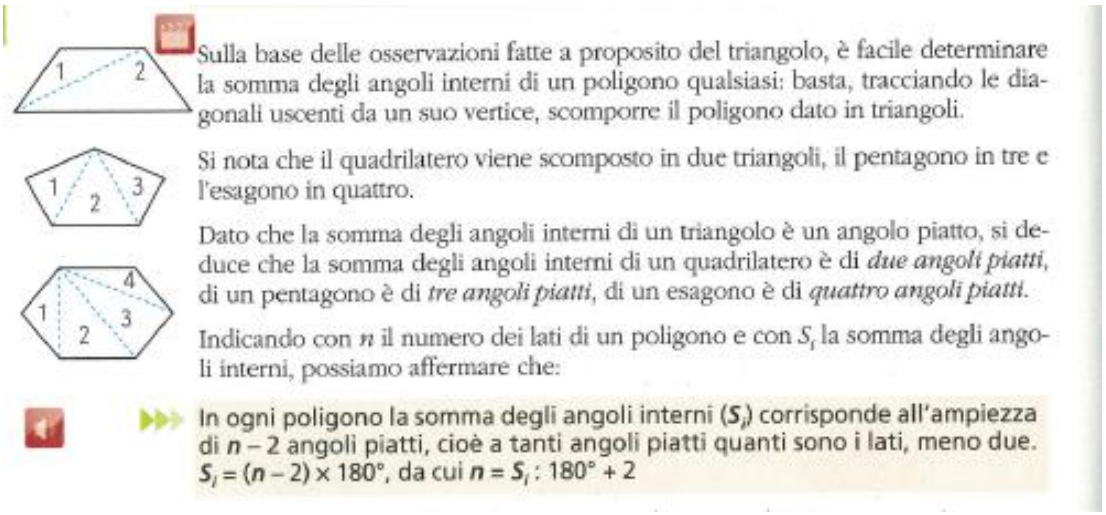
sua purezza; anzi, tipicamente è solo parte di un dispositivo che contiene al suo interno altri elementi formattati insieme, in un tutto organico. Anche il libro di testo scolastico è oggi scritto e presentato con la dovuta formattazione grafica; questo accade a maggior ragione con la matematica, e soprattutto con la geometria, che prevede inevitabilmente al suo interno, accanto a quella linguistica, anche una dimensione figurale e grafica caratteristica[48]. La prospettiva di analizzare le argomentazioni prodotte in ambito multimodale è relativamente recente (si veda ad esempio Kjeldsen, 2015; Pollaroli & Rocci, 2015; Rocci, 2017; Rocci & Pollaroli, 2018) e sfrutta strumenti provenienti tanto dalla tradizione degli studi linguistici e di argomentazione, quanto le attuali scienze della comunicazione relative all'uso delle immagini e degli espedienti grafici. Come vedremo meglio nei prossimi paragrafi, per i nostri scopi è sufficiente riconoscere che, all'interno di discorsi argomentativi, l'uso di elementi e strategie semiotiche non linguistiche, quali sono ad esempio le figure geometriche, l'uso di frecce o del colore, l'organizzazione del layout di una pagina, può assolvere a diverse funzioni che rientrano nelle materie dell'*inventio*, *dispositio* ed *elocutio*[49]. Ad esempio, la scelta di rappresentare uno specifico poligono invece che un altro, oppure di rappresentarne più di uno, può essere interpretata in termini di scelta degli argomenti che sostengono in modo più o meno efficace la tesi conclusiva all'interno dell'argomentazione, rientrando dunque nell'*inventio* del discorso; la scelta di disporre le figure e il testo all'interno della pagina in un modo piuttosto che in un altro può dar luogo a risultati comunicativi più o meno efficaci, rientrando dunque nella *dispositio* del discorso; infine la scelta stessa di rappresentare una data procedura o fatto geometrico secondo due modi semiotici diversi, quello linguistico e quello figurale, può essere intesa relativa al modo e alla forma con le quali presentare il discorso per far sì che esso risulti più comprensibile per l'uditorio, rientrando dunque nel tipo di scelte interne all'*elocutio*.

[48] È riconosciuto dalla ricerca in didattica che il linguaggio della matematica sia un sistema semiotico *multimodale* che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali, e *multivariato*, che include un ampio spettro di registri (Ferrari, P. L., 2021).

[49] Non solo: in Canducci, Rocci & Sbaragli (in press), si mostra come l'utilizzo più o meno efficace delle strategie semiotiche multimodali nei libri di testo di geometria possa portare a problematiche significative per il lettore-allievo, ad esempio quando tali strategie sono utilizzate per favorire il processo di conversione semiotica tra rappresentazioni espresse in registri diversi (Duval, 1993).

4.4 Analisi delle scelte di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio* riscontrate nel caso di studio

In questo paragrafo riprendiamo il caso di studio presentato nel paragrafo 4.2, relativo a un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado, e lo interpretiamo con le chiavi di lettura dell'*inventio*, della *dispositio* e dell'*elocutio*. Per comodità ne riportiamo nuovamente l'immagine.



Sulla base delle osservazioni fatte a proposito del triangolo, è facile determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi: basta, tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli.

Si nota che il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l'esagono in quattro.

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, si deduce che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di *due angoli piatti*, di un pentagono è di *tre angoli piatti*, di un esagono è di *quattro angoli piatti*.

Indicando con n il numero dei lati di un poligono e con S_i la somma degli angoli interni, possiamo affermare che:

In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrisponde all'ampiezza di $n - 2$ angoli piatti, cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due. $S_i = (n - 2) \times 180°$, da cui $n = S_i : 180° + 2$

4.4.1 L'inventio nel caso di studio

Un primo livello di *inventio* riscontrato in questa porzione di testo riguarda la tipologia di costruzione geometrica scelta come base della strategia argomentativa, che si basa sulla triangolazione del poligono effettuata tracciando tutte le diagonali che hanno come estremo un unico vertice fissato (*inventio I1*). Attraverso questa costruzione, la strategia argomentativa consiste nel mostrare che un poligono di *n* lati viene scomposto in *n-2* triangoli, per poi inferire che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è data dalla moltiplicazione tra *n-2 e* 180°, giungendo così alla tesi conclusiva.

A livello di tipo di ragionamento proposto, l'estratto rientra nella tipologia di *inventio* induttiva basata sull'esempio individuata da Aristotele: per dare fondamento al fatto che, triangolando in questo modo, un poligono di *n* lati viene suddiviso in *n-2* triangoli, vengono forniti esempi in cui ciò accade. In primo luogo notiamo, a livello quantitativo, che il testo sceglie di fornire tre esempi: questa scelta è importante perché, banalmente,

può essere vista come relativa alla quantità di premesse su cui basare l'argomentazione: ci si potrebbe chiedere se l'argomentazione sarebbe stata più o meno efficace se fosse stato presentato su un numero maggiore o minore di esempi. Anche la scelta di quali esempi fornire rientra nella materia dell'*inventio*: in questo caso si è scelto di riferirsi a un quadrilatero, un pentagono e un esagono, ossia ai tre poligoni che seguono il triangolo nella successione dei tipi di poligoni in base ai lati, scelta basata sulla speranza di favorire una generalizzazione che non sarebbe stata facilitata scegliendo, ad esempio, un ettagono, un dodecagono e un icosagono. La successione dei tipi dei poligoni sembra infatti ricalcare un processo di ricerca di una regola, di uno schema, che valga in generale e che prevede, almeno inizialmente, di esplorare casi in qualche modo vicini tra loro, con il fine di rinforzare una convinzione che si sta costruendo in modo empirico.

Parlando di generalizzazione, sempre a livello di *inventio*, notiamo che sono presenti almeno tre *luoghi* principali. Un primo *luogo*, utilizzato qui in senso induttivo, rientra nella categoria 'del genere e della specie', già citato nel paragrafo 4.3.1.1: "se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G"; questo luogo viene utilizzato per generalizzare a un poligono generico tre proprietà: la proprietà relativa al tipo di triangolazione, quella relativa al numero di triangoli che si ottengono con tale triangolazione e quella relativa al fatto che il numero di triangoli così ottenuti sia pari al numero dei lati del poligono meno due.

Un secondo *luogo* rientra all'interno della categoria 'della specie e dell'individuo', ed è invece utilizzato in modo deduttivo: "Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P", ed è utilizzato quando si applica il teorema relativo alla somma degli angoli interni di un triangolo generico ai triangoli ottenuti dalla costruzione. Un terzo *luogo* rientra invece nella categoria 'parte e tutto': "se un tutto è composto dal numero X di parti P uguali rispetto alla grandezza Q, allora il valore di Q per il tutto corrisponderà a X volte P", ed è utilizzato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono come *n-2* volte la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo. Osserviamo in generale che l'eterogeneità e la quantità di elementi di *inventio* qui richiamati rendono conto di una complessità che ci sembra non

evidente a una lettura limitata, che non prevede l'impostazione qui adottata: lo sguardo proposto si aggiunge dunque a quello abituale in didattica della matematica, arricchendolo.

4.4.2 La dispositio e l'elocutio nel caso di studio

Guardiamo ora a come è composto l'estratto a livello di *dispositio*, inserendo all'interno del commento anche riflessioni riguardo allo stile e alla forma linguistica con la quale essa viene realizzata – cioè all'*elocutio*. In prima battuta facciamo notare che, dal punto di vista matematico, la tesi è posta in fondo alla pagina e che, dal punto di vista dell'organizzazione del discorso trattata nel paragrafo 4.3.1.2, l'estratto può essere suddiviso nelle tre parti: *esordio*, *argomentazione*, *epilogo*. Notiamo che non è presente la parte della *narrazione*, che tipicamente si riferisce a discorsi in cui è necessario esporre eventi e avvenimenti riguardanti personaggi ed episodi significativi ai fini dello sviluppo dell'argomentazione.

Esordio. L'*esordio* è composto dal primo enunciato del primo blocco testuale: vengono richiamate premesse che verranno utilizzate nell'argomentazione (le "osservazioni fatte a proposito del triangolo"); viene inoltre manifestata la *quaestio*, cioè il tema su cui verterà l'argomentazione ("determinare la somma degli angoli interni di un poligono qualsiasi") spingendosi a dichiarare la semplicità della sua risoluzione ("è facile") con l'intento, forse, di disporre benevolmente il lettore.

Argomentazione. Il ragionamento argomentativo inizia nel primo blocco subito dopo la manifestazione della *quaestio*, alla quale si collega attraverso il segno di interpunzione forte ":". I *due punti* hanno qui una funzione esplicativa, e sono eloquentemente seguiti dal predicato verbale "basta", il cui significato da un lato rafforza in chi legge l'impressione relativa alla facilità di quanto si andrà a trattare, dall'altro ha la funzione di introdurre la costruzione alla base della strategia di *inventio I1* ("tracciando le diagonali uscenti da un suo vertice, scomporre il poligono dato in triangoli").

Il testo prosegue, nel secondo blocco testuale, esemplificando la costruzione appena enunciata: il ragionamento, proposto sulla base di tre esempi riguardanti "il quadrilatero",

“il pentagono” e “l’esagono”, è introdotto dal sintagma “si nota che”, e viene accompagnato da tre rappresentazioni figurali poste a sinistra. L’enunciato afferma che “il quadrilatero viene scomposto in due triangoli, il pentagono in tre e l’esagono in quattro”, affermazione sostenuta, a livello di *elocutio multimodale*, anche dalla scelta di rappresentare all’interno delle figure la notazione indo-araba del numero dei triangoli che si ottiene in ciascuno dei tre casi. È interessante richiamare che le scelte di *dispositio* operate in questo blocco seguono un ordine sequenziale rispetto al numero di lati. Questo è significativo perché, a differenza dell’induzione matematica in cui occorre mostrare la relazione tra il caso n-esimo e il caso $n+1$-esimo, il procedimento argomentativo di tipo induttivo in sé non necessita di una gradualità nell’ordine degli esempi che vengono proposti; questa scelta appare dunque tanto di tipo retorico quanto didattico-matematica: chi ha scritto questo estratto ha giustamente ritenuto più convincente presentare gli esempi in ordine crescente rispetto al numero dei lati, facendo corrispondere all’induzione argomentativa quella matematica. Dal punto di vista figurale, facciamo inoltre notare che il quadrilatero, il pentagono e l’esagono non sono generici: il primo è un trapezio isoscele; gli altri due, pur non essendo regolari, presentano simmetrie assiali. Se si considera che nella parte linguistica si parla genericamente di quadrilatero, pentagono ed esagono (introdotti dall’articolo con valore generico “il”), questa scelta di *elocutio* multimodale potrebbe essere da un certo punto di vista interpretata come scelta di tipo estetico, legata cioè all’*ornatus*, ma dal punto di vista pedagogico appare discutibile, perché il lettore potrebbe implicitamente assumere che la triangolazione proposta sia valida solo quando i poligoni presentano particolari caratteristiche geometriche. Sempre in questo blocco testuale, infine, non si può trascurare il fatto che, a livello di *elocutio*, esso presenti elementi di oscurità parziale dati dalla scelta di mantenere impliciti sia la relazione fra numero di lati e numero di triangoli che si ottengono dalla triangolazione per i tre esempi (4 lati - 2 triangoli; 5 lati - 3 triangoli; 6 lati - 4 triangoli), sia la generalizzazione al poligono generico dell’uguaglianza: ‘numero di triangoli = numero dei lati meno due’. Questa scelta di *elocutio* appare ovviamente problematica non solo ai fini di una chiarezza espositiva ma anche ai fini di un accompagnamento del lettore alla comprensione dell’argomentazione proposta. Ipotizziamo che tale scelta di de-enfatizzazione nasconda

una certa ritrosia, da parte del libro di testo, nell' esplicitare che quanto si sta proponendo non sia una vera e propria dimostrazione rigorosa, ma presenta un carattere induttivo che, forse, agli occhi del lettore, potrebbe risultare meno convincente. La scelta di lasciare impliciti i passi induttivi sembra in qualche modo mascherare la strategia argomentativa adottata, ma allo stesso tempo potrebbe condurre il lettore-allievo a considerarla come dimostrazione vera e propria. Se così fosse, l'allievo potrebbe perdere un'occasione per rendere cosciente a sé stesso l'esistenza di *prove* di natura diversa da quelle deduttive, formalmente non accettate in matematica, ma molto utili nella dimensione didattica dell'apprendimento della disciplina[50]. D'altra parte, se è vero che in un'argomentazione è opportuno dire né troppo né troppo poco, ci troviamo davanti a un dilemma tipico della *perspicuitas* retorica: quanto esplicitare, quanto dire, perché il discorso risulti chiaro e allo stesso tempo non pedante o eccessivamente complesso per l'uditorio?

Il terzo blocco testuale presenta l'argomento, di carattere deduttivo, con il quale si applica il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo per dedurre la somma degli angoli interni di un quadrilatero, di un pentagono e di un esagono. Richiamiamo l'attenzione sul fatto che in questo blocco, e solo in questo, viene utilizzato il corsivo nei sintagmi "*due angoli piatti*", "*tre angoli piatti*", "*quattro angoli piatti*", cioè il numero di angoli piatti cui corrisponde la somma degli angoli interni del quadrilatero, del pentagono e dell'esagono. Questa scelta di enfatizzazione rientra tipicamente nel tipo di scelte di *elocutio* che possono essere effettuate in un testo scritto, anche se in questo caso la sua efficacia può essere messa in dubbio: perché richiamare l'attenzione visiva solo sui risultati, e non sulla relazione tra poligono specifico e numero di angoli piatti, ad esempio utilizzando un colore per la coppia quadrilatero-due angoli piatti, un altro per la coppia pentagono-tre angoli piatti, un altro ancora per la coppia esagono-quattro angoli piatti?

Il quarto e penultimo blocco testuale rientra ancora nella parte argomentativa del discorso; interessante è notare che viene esplicitato per la prima volta il simbolismo matematico (n e S_i) che consentirà di esprimere la tesi in termini di un'uguaglianza simbolica; questa

[50] Questa de-enfatizzazione potrebbe anche essere interpretata come scelta efficace da parte del libro di testo: sostare in modo esplicito sull'utilizzo di un procedimento induttivo potrebbe condurre lo studente a pensare che si tratti di un contenuto da apprendere, e non di una strategia pedagogica per la costruzione di congetture matematiche.

scelta di *dispositio* non è l'unica possibile, perché si potrebbe scegliere, ad esempio, di introdurre il simbolismo necessario all'inizio dell'argomentazione: da un lato la scelta di introdurlo alla fine sembra sorreggere una maggiore fluidità nella discorsività del ragionamento; dall'altro, il rischio è di appesantire in modo repentino e non graduale l'argomentazione, aumentando la complessità semantica per il lettore, il quale deve saper improvvisamente decodificare una forma linguistico-simbolica nuova, che non è rientrata fino a questo momento nello stile di *elocutio* globale del discorso.

Epilogo. Infine, l'ultimo blocco testuale presenta la conclusione del discorso, nella quale viene esposta la tesi cui si voleva giungere. Osserviamo in primo luogo come questa conclusione venga inserita all'interno di un box colorato, segnalato a sua volta da tre triangoli di colore verde posti di fianco; queste scelte rientrano nella categoria di *elocutio*, perché hanno l'effetto di richiamare l'attenzione visiva del lettore attraverso delle enfasi di tipo semiotico multimodale date dall'uso di un colore diverso dallo sfondo bianco del testo precedente e dall'uso di elementi deittici extra-linguistici. Se ci concentriamo poi sulla parte testuale, si osserva la scelta di ribadire la tesi per ben tre volte con formulazioni diverse. Due di queste sono interne al primo enunciato, suddiviso in due proposizioni: la prima ("In ogni poligono la somma degli angoli interni (S_i) corrispondono all'ampiezza di *n-2* angoli piatti") è una formulazione in parte linguistica e in parte simbolica, nella quale vengono richiamati i simboli introdotti nel blocco precedente; la seconda ("a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due") è una formulazione esclusivamente linguistica che segue subito dopo la congiunzione con valore riformulativo "cioè". A questo enunciato segue, dopo la pausa data dal punto, una terza formulazione ("$S_i = (n-2)$ x 180°") esclusivamente simbolica[51]. Non possiamo fare a meno di mettere in evidenza l'abbondanza delle rappresentazioni, che da un lato è positiva perché stimola processi cognitivi imprescindibili nell'apprendimento della matematica (il trattamento e

[51] L'ulteriore espressione simbolica nel testo ($n = S_i : 180° + 2$), introdotta dal connettivo "da cui", rappresenta una tipica, e spesso malsana, abitudine, molto presente nei libri di questo livello scolastico, di presentare immediatamente le "formule inverse" dei risultati appena esposti senza ulteriori spiegazioni. Pur essendo questa scelta potenzialmente veicolo di confusione da parte del lettore, non commenteremo questo ulteriore passaggio, limitandoci a osservare come, ponendolo alla fine dell'argomentazione, gli si stia dando un'importanza forse non desiderata.

la conversione semiotica secondo la teoria di Duval, 1993); dall'altro, in questo caso, ci domandiamo in primo luogo se non vi sia il rischio che queste tre enunciazioni possano essere intese come enunciati semanticamente diversi tra loro, e in secondo luogo se queste diverse rappresentazioni potessero essere *disposte* in modo più efficace, ad esempio separando in modo netto le prime due, oppure presentando prima la formulazione esclusivamente linguistica, poi quella mista, infine quella simbolica. In ultimo osserviamo che la formulazione linguistica "cioè a tanti angoli piatti quanti sono i lati, meno due" conduce a un'ambiguità sintattica a causa della virgola posta tra la parola "lati" e "meno": uno studente che leggesse solo questa parte potrebbe interpretare la pausa indicata dalla virgola in senso procedurale, rischiando di capire che per trovare la somma degli angoli interni di un poligono occorra prima considerare tanti angoli piatti quanti sono i lati, e poi sottrarre due a questo valore.

Le scelte di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio* apportate in questo caso di studio rispecchiano solo alcune delle variegate possibilità retoriche presenti nei libri di testo di geometria; d'altronde, questo è naturale se si considera che, in generale, la retorica può essere considerata come arte di scegliere forme e strutture del discorso in modo che esso sia funzionale agli obiettivi di ragionevolezza e persuasione che ci si pone. Nei prossimi paragrafi metteremo a confronto le scelte del caso di studio con altre presenti nel corpus di libri DFA-Italmatica mostrandone dunque la molteplicità e le differenze; ciò verrà fatto accompagnandole con alcuni dati quantitativi.

4.5 La varietà di scelte nell'*inventio, dispositio* ed *elocutio* nei libri di testo

In questo paragrafo metteremo a confronto le scelte fatte a livello di categorie retoriche di *inventio* e di *dispositio* ed *elocutio* nel caso di studio da noi scelto con quelle effettuate in altri libri di testo scolastici rientranti nel corpus DFA-Italmatica. Questo al fine di cogliere la grande varietà di scelte che si possono intraprendere da questo punto di vista sullo stesso tema, e il possibile impatto comunicativo che potrebbero avere sui lettori-allievi. Va considerato che dei 143 libri del corpus, sono 23 quelli nei quali viene presentato l'argomento da noi scelto: 1 italiano di quinta primaria, 20 italiani di prima secondaria di

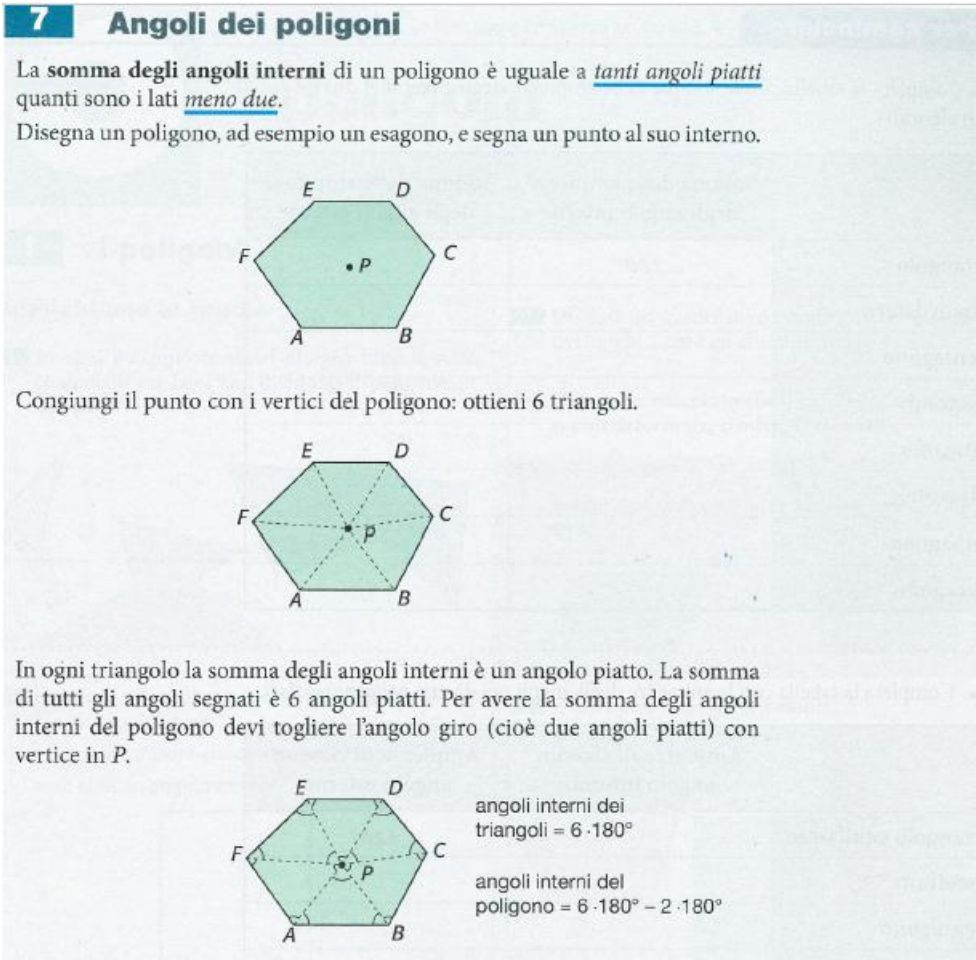
primo grado; 1 italiano di seconda scuola secondaria di primo grado; 1 svizzero (Canton Ticino) del secondo anno di scuola media[52].

4.5.1 La varietà dell'inventio per la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Nel corpus si possono identificare tre tipi di scelte di *inventio*, chiaramente distinte a livello di scelta della costruzione geometria come base della strategia argomentativa. La prima (*I1*) è stata presentata nel paragrafo precedente; la seconda (*I2*) e la terza (*I3*) vengono invece analizzate in questo paragrafo.

- L'*inventio I2* si basa sulla triangolazione del poligono che si ottiene tracciando i segmenti che hanno come estremi un punto interno al poligono e i vertici del poligono. Tale scelta è presente nel seguente esempio **(Figura 9)**.

[52] In Canton Ticino, la scuola media dura quattro anni, di cui i primi tre corrispondono al triennio di scuola secondaria di primo grado italiana.



7 Angoli dei poligoni

La **somma degli angoli interni** di un poligono è uguale a *tanti angoli piatti* quanti sono i lati *meno due*.

Disegna un poligono, ad esempio un esagono, e segna un punto al suo interno.

Congiungi il punto con i vertici del poligono: ottieni 6 triangoli.

In ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto. La somma di tutti gli angoli segnati è 6 angoli piatti. Per avere la somma degli angoli interni del poligono devi togliere l'angolo giro (cioè due angoli piatti) con vertice in *P*.

Fig. 9 – Esempio tratto da un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado in cui si utilizza la strategia di *inventio I2* (libro 19_6 del corpus, p. 155).

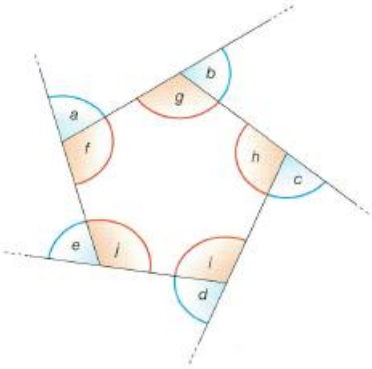
Analizzando l'esempio più nello specifico, anche l'argomentazione qui proposta rientra nella tipologia di *inventio* del 'caso particolare' individuato da Perelman & Olbrechts-Tyteca. Pur presentando una struttura che potrebbe far pensare alla porzione testuale in termini di illustrazione, si tratta in realtà ancora di un *esempio* utilizzato induttivamente per dare delle ragioni che sostengono l'accettazione della tesi, posta all'inizio del discorso. Una caratteristica a livello di *inventio* che emerge immediatamente è la scelta di presentare un solo esempio a sostegno dell'argomentazione, nello specifico un esagono, a differenza del caso di studio dove se ne proponevano tre diversi tra loro che conducono alla generalizzazione. La scelta di fornire un solo esempio, unita alla mancanza di passi

linguistici che potrebbero esplicitare le relazioni tra il caso specifico dell'esagono e il caso generico del poligono di *n* lati, sembra rendere ancora più nascosta rispetto al caso di studio la generalizzazione dal caso particolare al caso di un poligono generico, generalizzazione che sembra essere totalmente a carico del lettore. A livello di *luoghi*, ne notiamo almeno tre, afferenti alle categorie 'della specie e dell'individuo' e 'parte e tutto'. Il primo, usato in modo analogo al caso di studio, è di carattere deduttivo e rientra nella categoria 'della specie e dell'individuo'("Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P"). Un secondo luogo, anch'esso utilizzato nel caso di studio, e che rientra nella categoria 'parte e tutto' è usato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione come *n* volte la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo; sempre in questa categoria può rientrare anche un terzo luogo: "se un tutto T è composto dalle parti A e B, allora una delle due parti corrisponde al tutto meno l'altra parte", utilizzato per individuare la somma delle ampiezze degli angoli interni del poligono come differenza fra la somma delle ampiezze degli angoli di tutti i triangoli ottenuti dalla triangolazione e l'ampiezza dell'angolo giro.

- L'*inventio I3* si basa invece su una costruzione incentrata sulla costatazione che gli angoli interni ed esterni sono supplementari. Tale costruzione si riscontra nel seguente esempio (**Figura 10**).

Relazioni tra gli angoli interni

Osserva il poligono e i suoi angoli interni. Si nota che ogni angolo interno con il suo corrispondente esterno forma un angolo piatto:



$\hat{f} + \hat{a} = \hat{g} + \hat{b} = \ldots = 180°$

n = numero dei lati

$S_{\text{omma angoli } e_{\text{sterni}}}$ (Se) $= \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} = 360°$

$S_{\text{omma angoli } i_{\text{nterni}}}$ (Si) $= \hat{f} + \hat{g} + \hat{h} + \hat{i} + \hat{j} = ?$

Quindi, in questo poligono che ha cinque lati, la somma degli **angoli interni (Si)** e dei suoi **angoli esterni (Se)** è uguale a 5 angoli piatti:

$$Si + Se = 5 \times 180°$$

Poiché la somma degli angoli esterni è uguale a un angolo giro, cioè a due angoli piatti, per calcolare la somma degli angoli interni del poligono basta togliere 2 angoli piatti dalla somma di tutti gli angoli (Si + Se), cioè:

$$Si = 5 \times 180° - 2 \times 180° = (5 - 2) \times 180° = 3 \times 180°$$

La somma degli angoli interni di un pentagono è uguale a 3 angoli piatti, cioè 540°.

Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono; si ha che:

la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono qualsiasi è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.

Indicando con n il **numero dei lati**, si può scrivere la formula per calcolare la somma degli angoli interni:

$$\mathbf{Si = (n - 2) \times 180°}$$

Fig. 10 – Esempio, tratto anch'esso da un libro di testo italiano del primo anno di scuola secondaria di primo grado, in cui si utilizza la strategia di *inventio I3* (libro c1_6, p. 193).

A livello di tipo di ragionamento proposto, anche questo estratto rientra nella tipologia di *inventio* del "caso particolare", nello specifico in quello che gli autori chiamano *esempio*, anche se a differenza di quanto accadeva per il caso di studio, si sceglie nuovamente, in analogia a quanto scelto nell'esempio relativo all'*inventio I2*, di fornire un solo esempio a sostegno dell'argomentazione, sviluppato attorno alla costruzione relativa a un pentagono. Per quanto riguarda i luoghi presenti nel testo, ne troviamo almeno quattro, afferenti a tre categorie presenti anche nel caso di studio e nell'esempio precedente. Il primo, interno alla categoria 'della specie e dell'individuo' ("Se per la specie S vale una proprietà P, allora per ogni individuo della specie S vale la proprietà P") è utilizzato quando si applica

al caso del pentagono il fatto che la somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono corrisponde all'ampiezza di un angolo giro. Un secondo luogo, anch'esso utilizzato nell'esempio precedente, è qui usato per calcolare la somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni del pentagono come *n* volte la somma delle ampiezze di un angolo interno ed esterno corrispondente (ossia 180º), e rientra nella categoria 'parte e tutto'; sempre in questa categoria rientra anche il terzo luogo, presente anche nell'esempio precedente: "se un tutto T è composto dalle parti A e B, allora una delle due parti corrisponde al tutto meno l'altra parte", qui utilizzato per individuare la somma delle ampiezze degli angoli interni del pentagono come differenza fra la somma delle ampiezze degli angoli di tutti i triangoli ottenuti dalla triangolazione e l'ampiezza dell'angolo giro. Infine, troviamo in questo estratto anche un luogo 'del genere e della specie', già citato nel caso di studio: "se diverse specie di un genere G posseggono una data proprietà P, allora probabilmente P è una proprietà del genere G"; questo luogo viene utilizzato per generalizzare a un poligono generico il ragionamento adottato in questo caso, come manifestato dall'affermazione presente nel testo "Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono". Questa affermazione risulta cruciale, in quanto rende esplicito il passo di generalizzazione che non è coperto dalle altre inferenze di tipo deduttivo presenti nel discorso.

Gli esempi mostrati relativi alle tre strategie di *inventio* presentano dunque elementi di diversità al loro interno, dati dalla scelta del tipo di ragionamento proposto e da diverse ulteriori scelte. Nella **Tabella 8** vengono schematizzate le differenze più evidenti che fanno riferimento alle conoscenze matematiche in gioco per ciascuna delle tre strategie. Abbiamo categorizzato queste differenze dal punto di vista dei prerequisiti geometrici necessari, dei risultati matematici nuovi cui si giunge e dei passaggi aritmetico-algebrici coinvolti.

	Inventio I1	***Inventio I2***	***Inventio I3***
Prerequisiti	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°.	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°.	La somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono è costante ed è 360°.

		Un angolo giro ha un'ampiezza di 360°.	Un angolo giro corrisponde a due angoli piatti.
		Un angolo giro corrisponde a due angoli piatti.	
Risultati matematici	Il numero di triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari al numero dei lati del poligono (n) meno due.	Il numero dei triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari al numero dei lati del poligono (n).	In un poligono angoli esterni e angoli interni corrispondenti sono supplementari[53].
	La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono si ottiene moltiplicando 180° per il numero dei triangoli.	La somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione è pari a 180° moltiplicato per il numero di triangoli.	La somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni di un poligono è pari a 180° moltiplicato per il numero di angoli (interni o esterni) del poligono.
		La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono si ottiene sottraendo l'ampiezza di un angolo giro alla somma delle ampiezze degli angoli interni dei triangoli ottenuti dalla triangolazione.	La somma delle ampiezze degli angoli interni ed esterni di un poligono è pari a 180° moltiplicato per il numero di angoli (interni o esterni) del poligono.
Passaggi aritmetico-algebrici	Moltiplicazione: $(n - 2) \times 180°$.	Moltiplicazione: "angoli interni dei triangoli" $= 6 \cdot 180°$."	Moltiplicazione: $S_i + S_e = 5 \times 180°$.
		Sottrazione: "angoli interni del poligono" $= 6 \cdot 180° - 2 \cdot 180°$".	Sottrazione: $S_i = 5 \times 180° - 2 \times 180°$.
			Proprietà distributiva: $5 \times 180° - 2 \times 180° = (5 - 2) \times 180°$.
			Sottrazione: $(5 - 2) \times 180° = 3 \times 180°$.

Tab. 8 – Differenze presenti all'interno delle diverse strategie di inventio in termini di prerequisiti, risultati matematici e passaggi aritmetico-algebrici.

In generale, notiamo che la strategia *I1* è quella che prevede meno elementi di prerequisiti, risultati matematici nuovi e passaggi aritmetico-algebrici. Dal punto di vista quantitativo si rileva che delle 23 porzioni di testo del sub-corpus, 14 (il 60,9%)

[53] In linea di principio, questo risultato potrebbe anche essere trattato precedentemente nel testo, e utilizzato in questo caso come prerequisito. Tuttavia, nell'esempio mostrato (e nelle altre porzioni di libri del corpus in cui si utilizza la strategia *I3*) esso viene sempre presentato nel momento in cui si affronta la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono, motivo per cui lo abbiamo inserito tra i risultati matematici.

utilizzano la tipologia *I1* presente nel caso di studio, 4 (il 17,4%) la tipologia *I2*, 4 (17,4%) la tipologia *I3*; in 1 caso, (il 4,3%) invece, si sceglie di mostrare entrambe le strategie *I1* e *I2*, anche se queste vengono applicate a un problema specifico e non viene fatta alcuna generalizzazione al poligono generico[54]. La maggior parte dei libri di testo del corpus utilizza dunque la strategia *I1*, che, basandosi su un minor numero di conoscenze da attivare, risulta essere più intuitiva e immediata. Osserviamo però che questa immediatezza potrebbe essere solo apparente, perché si poggia su un fatto geometrico non banale quale è la relazione tra numero di lati del poligono generico e numero di triangoli ottenuti da quel tipo di triangolazione ($n - 2$), relazione che dal lato pedagogico è plausibile interpretare come cognitivamente complessa da accettare. Il punto delicato in questa strategia è proprio riuscire a convincere gli allievi della validità di questa relazione.

È interessante aggiungere, a queste già di per sé significative differenze di *inventio*, altre riflessioni sulle diverse realizzazioni argomentative in termini di *dispositio* ed *elocutio* rispetto dal caso di studio, di cui daremo riscontro nel prossimo paragrafo.

4.5.2 La varietà della dispositio ed elocutio per la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono

Dai due esempi riportati nel paragrafo precedente si evince come, anche a livello di *dispositio* ed *elocutio*, le scelte possono essere molto varie[55]. In questo paragrafo mostreremo solo gli aspetti più generali, senza entrare negli aspetti più puntuali, perché già da questi si intuisce la grande variabilità di scelte possibili. Nell'esempio in cui si utilizza la strategia *I2* (**Figura 9**), si nota a livello di organizzazione del discorso che il testo è composto dalle fasi dell'*esordio* e dell'*argomentazione*, mentre manca un

[54] C'è da dire che questo caso rientra all'interno di un libro, in uso nel Canton Ticino, che è particolarmente attento a dare spazio alla dimensione dei problemi matematici da cui far emergere riflessioni e ragionamenti, non solo risultati.

[55] Abbiamo scelto di analizzare le scelte di *dispositio* ed *elocutio* negli esempi già mostrati in precedenza, evitando di appesantire la trattazione con ulteriori porzioni di libri di testo. Questo da una parte ci consente di andare in profondità rispetto agli esempi presentati, rinunciando d'altra parte a caratterizzare le scelte possibili di *dispositio* ed *elocutio* riferite a un'*inventio* geometrica specifica.

epilogo conclusivo. In questo caso, l'esordio coincide con l'enunciazione della tesi, a cui segue l'argomentazione a sostegno della stessa. L'argomentazione è composta da tre blocchi linguistico-figurali, disposti in modo sequenziale. Nel primi due blocchi viene descritto il procedimento relativo alla costruzione geometrica da realizzare, riferito a un esagono. Significativo è notare l'utilizzo di un linguaggio che, a differenza di quanto accadeva nel caso di studio, tenta di coinvolgere in prima persona il lettore attraverso l'uso di verbi iussivi alla seconda persona singolare ("Disegna", "segna", "congiungi" ecc.). Questo tipo di strategia comunicativa può variare molto a seconda dell'impostazione adottata dal testo (come mostra l'analisi condotta in Sbaragli, Canducci & Demartini, in stampa), e in generale prevedere coinvolgimenti molto diversi del lettore, ad esempio stimolandolo a operare direttamente congetture sulla base di attività più o meno laboratoriali. Nel terzo blocco vengono invece presentati i passi del ragionamento che conducono alla giustificazione della tesi, rinunciando al coinvolgimento diretto del lettore.
A livello di *elocutio* multimodale, si nota globalmente la scelta di rappresentare l'esagono tre volte, in seguito alla parte linguistica di ciascuno dei tre blocchi. Notiamo anche che il punto rappresentato all'interno dell'esagono, cruciale per la triangolazione proposta, risulta essere in una posizione centrale della figura, cosa che non solo non sarebbe necessaria ai fini della validità dell'argomento, ma rischia di portare con sé interpretazioni non desiderate, perché un lettore potrebbe pensare che la triangolazione sia valida solo quando il punto interno al poligono è scelto in una posizione privilegiata. Infine, anche in questo caso si è scelto di utilizzare strategie semiotiche di enfatizzazione del testo (il grassetto e la sottolineatura nel primo enunciato).

Si notano varie differenze di *dispositio* ed *elocutio* anche con l'esempio riferito alla strategia di *inventio I3* (**Figura 10**). A livello di *dispositio*, si nota l'assenza di un *esordio*: il testo procede direttamente presentando l'*argomentazione* seguita dall'*epilogo*, nel quale viene presentata la tesi, mostrando dunque un esempio diverso dai due casi precedenti. L'argomentazione può essere suddivisa in diverse parti. La

prima è di tipo linguistico, figurale e simbolico: viene introdotto un dato osservativo (significativamente richiamato dal verbo "Osserva") dell'argomentazione, che sta nel riconoscere che ogni angolo interno forma insieme al corrispondente angolo esterno un angolo piatto; inoltre, a differenza di quanto accadeva nel caso di studio, si introducono fin da subito numerosi simboli, utili nelle parti successive dell'argomentazione. Quanto osservato nella prima parte funge da premessa all'affermazione enunciata nella seconda, significativamente introdotta dal connettivo "Quindi". Dopo aver richiamato il prerequisito relativo al fatto che la somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono è uguale all'ampiezza dell'angolo giro, nella terza parte si propongono passaggi di tipo aritmetico riferiti al caso del pentagono, arrivando a concludere che "La somma degli angoli interni di un pentagono è uguale a 3 angoli piatti, cioè 540°". A questa conclusione segue un'importante affermazione, che mancava tanto nel caso di studio quanto nell'esempio riferito alla strategia *I2*: "Questo ragionamento può essere fatto per qualsiasi poligono", che rende esplicita la generalizzazione al caso di un poligono generico a partire dall'esempio mostrato. Segue dunque la tesi, espressa dapprima in forma linguistica ("la somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono qualsiasi è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due"), poi attraverso una sua riformulazione simbolica ("$S_i = (n-2) \times 180°$"). Osserviamo che tale scelta sembra essere, rispetto a quanto accadeva nel caso di studio, più ordinata e chiara, ma più complessa dal punto di vista della gestione degli aspetti aritmetico-algebrici.

Dal punto di vista dell'*elocutio* multimodale, anche in questo caso si notano strategie semiotiche utili a enfatizzare alcune parti del discorso (uso del colore nella rappresentazione degli angoli del pentagono, uso del grassetto, uso del colore nel box in cui è racchiusa la prima formulazione della tesi). Rispetto al caso di studio e all'esempio precedente, inoltre, viene fatto un maggiore uso del simbolismo matematico: al di là dei simboli n, S_i ed S_e, utilizzati poi nelle varie parti dell'argomentazione, emerge la scelta, forse esageratamente pedante e non necessaria,

di introdurre anche un simbolismo per gli angoli interni ed esterni rappresentati in figura.

Può essere interessante esplicitare che, delle 23 porzioni di testo del corpus, indipendentemente dall'utilizzo delle strategie *I1*, *I2* e *I3*, 19 (l'82,6%) scelgono di proporre la tesi come *epilogo* del discorso; 1 caso (il 4,3%) presenta la tesi all'interno dell'argomentazione, facendola seguire da un esempio illustrativo della strategia geometrica adottata; 1 (il 4,3%), corrispondente all'esempio mostrato in precedenza, pone la tesi come *esordio* del discorso; infine, 2 casi (l'8,7%) non esplicitano la tesi: un libro stimola lo studente a ipotizzarla in modo autonomo, l'altro invece si limita a raggiungere la conclusione riferita al caso specifico di un pentagono. Questo è indice di una preferenza generale dei libri di testo per la scuola, a cui potrebbe corrisponderne un'altra a livello di pratiche didattiche, di terminare il discorso con una conclusione che è anche la tesi cui si voleva giungere[56]. Abbiamo inoltre rilevato che delle 23 porzioni di testo, 9 (il 39,1%) scelgono di proporre un *esordio* per introdurre il tema, mentre 14 (il 60,9%) iniziano direttamente dalla parte *argomentativa*. Si nota dunque una certa tendenza a entrare direttamente dentro al tema (in *medias res*, come direbbe uno studioso di retorica), senza preamboli introduttivi, il che potrebbe disorientare il lettore bisognoso di capire il senso di quello che sta per affrontare.
Ovviamente, la variabilità delle scelte di *dispositio* ed *elocutio* è presente anche all'interno di ciascuna categoria di *inventio*, ma in misura meno significativa, motivo per cui abbiamo deciso di non renderne conto in questo contributo. D'altra parte, anche solo analizzando gli aspetti più generali presenti negli esempi mostrati, risulta evidente il livello di eterogeneità che le lenti teoriche da noi adottate riescono a far emergere.

[56] Notiamo che ciò differisce da quanto accade abitualmente nei testi e nella pratica didattica universitaria, in cui solitamente si preferisce enunciare il teorema e poi la sua dimostrazione.

4.6. Conclusioni

Le analisi condotte sulla base del quadro teorico presentato consentono di trarre alcune conclusioni.

In primo luogo, ci sembra opportuno rimarcare come non fosse scontata la possibilità di applicare categorie di analisi di tipo retorico, oggi afferenti ai domini delle scienze della comunicazione e delle teorie dell'argomentazione, al caso di libri di testo di matematica. Le analisi condotte hanno mostrato non solo che questo è possibile, ma che riflettere su testi argomentativi di matematica attraverso le lenti proposte permette di mettere in evidenza, e anche in parte di sciogliere, la complessità di questi testi, nei quali si intrecciano dimensioni legate al tipo di argomenti proposti (l'*inventio*), al modo con il quale si struttura il discorso (la *dispositio*) e alla forma linguistico-testuale che viene adottata (l'*elocutio*). In particolare, a livello di *inventio*, l'esplicitazione delle strutture di ragionamento ha messo in evidenza come esistano diversi modi di trattare la generalizzazione all'interno di argomentazioni non dimostrative: la generalizzazione può essere infatti più o meno esplicitata linguisticamente, e più o meno facilitata dall'uso di esempi come sostegno empirico al passo induttivo. Sempre a livello di *inventio*, l'esplicitazione dei *luoghi* ha fatto emergere una serie di meccanismi inferenziali di base di varia natura, che potrebbero non rientrare in un patrimonio già consolidato degli studenti.

A livello di *dispositio* ed *elocutio*, l'esplicitazione della struttura organizzativa del testo ha messo in evidenza da un lato le possibilità comunicative offerte dall'utilizzo delle parti del discorso, dall'altro ha consentito di focalizzare l'attenzione su alcune scelte stilistiche che potrebbero risultare problematiche. Su questo ultimo punto in particolare, emergono scelte stilistiche *marcate* che a volte vanno in contraddizione con il carattere di genericità che richiederebbe la disciplina, e come alcune scelte di enfatizzazione e de-enfatizzazione possano produrre ambiguità di natura semantica e inferenziale.

Questo tipo di analisi diventa dunque importante, perché consente - al ricercatore, ma anche all'insegnante che utilizza il libro nella pratica didattica - di guardare al testo

con un occhio fine e critico, che può favorire una maggiore consapevolezza di quali siano i dettagli comunicativi con i quali il testo “parla”; questo occhio critico può risultare utile anche per ciò che avviene in classe in termini di oralità. Ad esempio, l’insegnante potrebbe scegliere di adottare argomenti, ordini del discorso o stili comunicativi differenti in base a questioni di carattere didattico, riferite alla disciplina matematica, ma anche contestuali, riferite cioè al particolare uditorio dato dagli studenti della classe: quali strategie argomentative sono più opportune in base alle conoscenze dei miei studenti? È opportuno presentarne una sola o più di una? Quanti e quali esempi proporre nell’argomentazione che si vuol condurre? Come organizzare il discorso in modo che esso risulti il più efficace possibile dal punto di vista comunicativo? E ancora: come disporre, ad esempio alla lavagna, il testo scritto, le figure e i simboli matematici in modo che sostengano il ragionamento invece di confonderlo? Quali attenzioni linguistiche adottare perché il discorso non presenti oscurità parziali? Quale equilibrio tenere tra il dire troppo, rischiando di annoiare qualcuno, e il dire troppo poco, rischiando di perderne qualcun altro per strada?

Tutte queste domande, alle quali potrebbero esserne aggiunte altre, sono da un lato spunti di riflessione per i docenti, ma anche proficui campi di studio per i ricercatori in didattica della matematica, che potrebbero indagare gli effetti, in termini di comprensione, delle diverse scelte linguistico-comunicative adottabili con gli studenti.

Capitolo 5. Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani

MICHELE CANDUCCI, SILVIA DEMARTINI E SILVIA SBARAGLI

Starting from the corpus of the project *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* (project 176339 of the Swiss National Science Foundation), we propose an analysis of the expression of the grammatical category of number within specific statements of geometry: the definitions of the elements of the polygon. The analysis is based on the interweaving of linguistic and mathematics education's research tools. In particular, we examine examples taken from the corpus to analyze the homogeneity or inhomogeneity of number and the linguistic strategies that realize it. The results show how a widespread linguistic inhomogeneity in number category can produce a significant lack of adherence to the mathematical content, which could negatively affect students' understanding process.

A partire dal corpus del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica), viene presentata un'analisi dell'espressione della categoria grammaticale di numero all'interno di enunciati specifici della geometria: le definizioni degli elementi del poligono. L'analisi è basata sull'intreccio fra gli strumenti della linguistica e della didattica della matematica. In particolare, si prendono in esame esempi tratti dai manuali del corpus, per analizzarne l'omogeneità o disomogeneità di numero e le strategie linguistiche che la realizzano. I risultati mostrano come a diffuse disomogeneità linguistiche nella categoria di numero corrispondano significative

mancanze di aderenza rispetto ai contenuti matematici, che potrebbero incidere negativamente sul processo di comprensione da parte degli allievi.

MICHELE CANDUCCI (michele.canducci@supsi.ch) è docente-ricercatore presso il centro competenze DdM (didattica della Matematica) del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno e studente dottorando presso la facoltà di Scienze della Comunicazione dell'Università della Svizzera italiana di Lugano.

SILVIA DEMARTINI (silvia.demartini@supsi.ch) è docente-ricercatrice in didattica dell'Italiano presso il centro competenze DILS (didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione) del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno; tiene, inoltre, corsi di scrittura e di linguistica italiana presso altri atenei.

SILVIA SBARAGLI (silvia.sbaragli@supsi.ch) è professore in didattica della matematica presso il centro competenze DdM (didattica della matematica) del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di Locarno, di cui è responsabile. È direttrice della rivista *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* (www.rivistaddm.ch).

5.1. Introduzione

Il tema trattato in questo contributo si inserisce all'interno del progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica). Il progetto consiste nell'individuazione, nella raccolta e nell'analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, di un corpus costituito da parti di manuali scolastici di matematica in lingua italiana[57] della scuola primaria e secondaria di primo grado, al fine di delinearne le caratteristiche e i possibili ostacoli per la comprensione degli alunni.

[57] Considerando non solo il contesto italiano, ma anche il Canton Ticino (Svizzera) e il Canton Grigioni (Svizzera).

Le parti selezionate dei manuali scolastici sono relative all'ambito geometrico e riguardano il tema dei poligoni, in un'ottica di continuità dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado. I poligoni, infatti, permeano tutta la scuola dell'obbligo, in accordo con l'idea di percorso a spirale per la costruzione di competenze matematiche, in cui alcuni degli argomenti affrontati dagli allievi nei primi anni di scolarità vengono consolidati e approfonditi in diverse occasioni negli anni successivi.

I manuali scolastici di matematica, oggetto di questa analisi, rappresentano un genere testuale la cui funzione prevalente è di tipo «espositivo-esplicativo» (Ferrari, A., 2019, p. 78), cioè finalizzata a fornire informazioni, ma, in realtà, sono testi ibridi (Viale, 2016), che alternano tratti comunicativi diversi. A livello di contenuto, sono testi ascrivibili all'ampia categoria dei testi scientifici, in particolare di tipo secondario, riconducibili al «discorso scientifico-pedagogico» (Dardano, 2008, p. 180): quei testi che, pur in modi eterogenei e senza il livello di tecnicismo presente nei testi scientifici primari[58], trattano un sapere necessariamente caratterizzato da precisione e rigore. Le modalità attraverso cui le informazioni sono trasmesse possono essere varie e rivelare diverse intenzioni comunicative: parti di analisi, spiegazione e ricapitolazione si alternano spesso a unità testuali che mirano a coinvolgere direttamente il lettore, ad esempio attraverso richieste dirette o simulazioni di esse, per aumentarne il coinvolgimento (Demartini, Ferrari, & Sbaragli, 2020). Coloro che si occupano di selezionare e presentare i contenuti sono, com'è ovvio, gli autori del manuale, mentre i fruitori sono destinatari che − perlomeno a livello teorico – dovrebbero poter imparare da ciò che leggono nel testo: in questo senso si realizza una relazione che potremmo ricondurre al tipo complementare (Watzlawick, Beavin, & Jackson, 1971), in cui una delle due parti (il testo) *sa* molto di più del lettore, il quale si trova nella condizione complementare di ricevere e gestire – nel caso specifico con l'aiuto del docente − il sapere veicolato.

Se si considera l'atto interpretativo del lettore, non va dimenticato che, in base alla classificazione dei testi rispetto al vincolo interpretativo (Sabatini, 1999), i manuali scolastici sono considerati mediamente vincolanti: sono cioè generalmente univoci e rigorosi, sebbene adottino modi espressivi più fruibili e vicini al destinatario. Ciò significa

[58] Sulla distinzione fra discorso scientifico primario e secondario si veda Cortelazzo, 2011.

che, per poter imparare da ciò che leggono, gli allievi devono riuscire a gestire un testo caratterizzato, soprattutto in alcune parti, da una certa rigidità e da modi tipici del testo scientifico matematico primario. Nell'insieme, è possibile affermare che sono dispositivi rigidi dal punto di vista dell'interazione comunicativa, e in essi è particolarmente inibita quella «negoziazione fra gli interlocutori» che Pier Luigi Ferrari afferma essere in generale carente nei testi scritti:

> Nei contesti colloquiali il significato viene costruito attraverso un processo di negoziazione fra gli interlocutori, mentre nei registri scritti questo processo è molto più difficile: un testo scritto può essere letto anche da persone che non conoscono l'autore o dal quale non sono conosciute, o comunque molto lontane dal punto di vista dello spazio, del tempo e della cultura; il lettore deve quindi ricostruire il significato sulle sole basi del testo e della propria cultura (Ferrari, P.L., 2004, p. 61).

Siamo dunque in presenza di una asimmetria cognitiva e relazionale tra lettore e testo: in questa condizione, il lettore solitamente ripone una certa implicita fiducia nel fatto che l'autore del libro abbia inserito tutte le informazioni necessarie e complete affinché lui possa comprendere ciò che gli si vuole comunicare, in modo da «limitare la possibilità […] di adottare interpretazioni incoerenti coi suoi scopi» (Ferrari, P.L., 2004, p. 61); per contro, la realtà dei testi si fonda in misura maggiore o minore su delle scelte, che inevitabilmente prevedono esclusioni, impliciti e conseguenti inferenze da elaborare (se il lettore è in grado). Ciò si amplifica in particolare per i manuali scolastici. Per tale ragione è necessario che vi sia una gradualità nelle informazioni proposte, e che le informazioni selezionate e le scelte effettuate dagli autori siano chiare, corrette e omogenee, al fine di trasporre nel migliore dei modi il sapere che si vuole fare apprendere.

Certamente la sola interazione con il manuale scolastico non è la modalità privilegiata con la quale avviene il processo di insegnamento / apprendimento, il quale tipicamente si svolge all'interno di una classe attraverso modalità di comunicazione di varia natura, prevalentemente colloquiali. Si tratta però di uno strumento a disposizione di insegnanti e studenti nel quale il sapere veicolato viene fissato: uno strumento pertanto centrale nel contesto scolastico di apprendimento, per quanto spesso usato solo in parte e con alcune riserve. Proprio pensando al libro come luogo della fissazione dei contenuti − data dalla

presentazione di essi attraverso *una* possibile forma scritta, a fronte di altre possibili −, la ricostruzione dei significati trasmessi dal testo si configura come un processo di decodifica e sistemazione semantica a opera esclusiva del lettore. In effetti, nonostante la mediazione del docente e il confronto fra pari, può accadere che l'allievo si trovi a tu per tu con il testo senza possibilità di confronto con l'emittente del messaggio, cioè con gli autori. Risulta dunque importante analizzare il rapporto fra testo scolastico e lettore, focalizzando in particolare l'attenzione sulle scelte espositive ed espressive effettuate nei manuali, per individuare le eventuali difficoltà che vi si annidano.

A tale scopo va anche considerato che gli autori non sono gli unici responsabili di ciò che è presente in un manuale scolastico: la produzione di questo genere testuale coinvolge infatti diversi produttori di significato (autori, redattori, grafici, illustratori ecc.) che cooperano fra loro. Ora, dato che ciascuno di essi evidenzia, seleziona, organizza i diversi aspetti secondo la propria concezione e professionalità, l'insieme delle figure professionali che lavorano a un manuale scolastico diventa a tutti gli effetti *costruttore di significato* (Bezemer & Kress, 2010). Dunque, la maggiore o minore efficacia delle informazioni veicolate dipendono anche dal livello di coerenza globale che questi costruttori di significato riescono a concretizzare nell'armonizzare fra loro aspetti testuali, grafici, di impaginazione ecc. Guardare a tutti questi aspetti insieme è un'impresa complessa, che coinvolge dunque competenze matematiche e linguistiche, ma anche di interpretazione di scelte grafiche[59].

In questo articolo vogliamo invece focalizzarci su un aspetto linguistico che si colloca al livello della morfosintassi (o microsintassi): vogliamo cioè mettere in evidenza come le diffuse disomogeneità nella realizzazione della categoria grammaticale del *numero*, cioè di plurale e singolare, all'interno di porzioni dei manuali scolastici in cui vengono definiti alcuni enti geometrici relativi ai poligoni, possano produrre una mancanza di aderenza rispetto al sapere matematico in gioco, e dunque creare eventuali ostacoli per chi apprende.

[59] Da questo punto di vista, l'analisi multimodale dei testi può essere uno strumento efficace di indagine, perché si occupa principalmente di testi nei quali varie risorse semiotiche cooperano alla determinazione dei significati (Jewitt, Bezemer, & O'Halloran, 2016). In relazione ai manuali di matematica, questo approccio di analisi testuale è stato sfruttato per evidenziare alcune criticità nell'utilizzo di risorse semiotiche di tipo grafico per sostenere il lettore nella conversione fra registro figurale e lingua naturale (Canducci, Rocci & Sbaragli, in press).

Il contenuto matematico di cui ci occuperemo è solitamente accompagnato da aspetti figurali che abbiamo scelto di non trattare in questo contributo, per poter andare maggiormente in profondità sugli aspetti linguistici; la relazione tra aspetti linguistici e aspetti figurali sarà oggetto di un articolo successivo. Partendo dalle caratteristiche del linguaggio della matematica e in particolare delle definizioni, ci addentreremo nella categoria grammaticale di *numero*, per poi approfondire i concetti di omogeneità e aderenza coinvolti nell'analisi. In particolare, attraverso alcuni esempi tratti dai manuali scolastici del corpus, mostreremo come si manifesta questa disomogeneità, in apparenza poco rilevante, ma che può incidere sul processo di acquisizione dei concetti.

5.2. Le caratteristiche del linguaggio della matematica

Un manuale scolastico di matematica possiede inevitabilmente caratteristiche dovute alla disciplina trattata e in particolare al suo linguaggio specialistico. Le caratteristiche che contraddistinguono maggiormente la lingua speciale della matematica, condivise in parte anche da altri linguaggi specialistici (Gotti, 2005; Gualdo & Telve, 2011; Cortelazzo, 2011), sono l'universalità, la precisione, la concisione e l'astrattezza.

La matematica ha la tendenza, pur con i dovuti distinguo, a essere un linguaggio universale, trasferibile da una lingua storico-naturale all'altra, cioè un linguaggio attraverso cui «chiunque abbia una certa comprensione matematica è in grado di risolvere problemi matematici indipendentemente dalla lingua che parla» (Adoniou & Qing, 2014, p. 3, traduzione degli autori). L'universalità del linguaggio matematico è stata nei secoli ampiamente dibattuta in ambito storico, filosofico, logico e, nel secondo '900, anche nelle riflessioni epistemologiche in seno alla didattica della matematica. Alcuni autori (Merchant, 1999; Perkins & Flores, 2002; Parker Waller & Flood, 2016) notano ad esempio come il fatto che la matematica sia composta da un linguaggio trasferibile da una lingua all'altra consenta di creare intersezioni significative fra persone appartenenti a gruppi linguistici e culturali differenti. Altri autori (D'Ambrosio, 1985, 2007; Barrow, 2014; Cavanagh, 2005) sottolineano invece la rilevanza che hanno i fattori culturali specifici di una popolazione anche nella creazione di simbolismi con i quali fare matematica, rilevanza che sembra sostenere la posizione di una non universalità intrinseca

del linguaggio matematico. D'altra parte, è anche vero che la struttura logica e retorica dell'esposizione matematica, sintetizzabile nel formato definizione-teorema-dimostrazione, e codificata da Euclide attorno al 300 a.C. negli *Elementi*, è tuttora utilizzata senza particolari variazioni in articoli e testi scientifici (Parker Waller & Flood, 2016). Il discorso è insomma complesso e articolato, ed esula dagli scopi di questo contributo. In questa sede è sufficiente ammettere che il linguaggio matematico nel corso dei secoli si è sviluppato in simbolismi e sub-codici specialistici universalmente condivisi e utilizzati (Laborde, 1995).

Il linguaggio della matematica possiede, inoltre, le caratteristiche di precisione e concisione. Tali caratteristiche rendono l'enunciazione matematica particolarmente densa (Laborde, 1995; D'Amore, 2000): è infatti piuttosto frequente trovare in un testo matematico espressioni e frasi nelle quali vengono fornite numerose informazioni in poche battute. Si pensi ad esempio all'espressione "gli angoli formati da lati consecutivi contenenti punti del piano interni al poligono" scelta da alcuni testi per definire gli angoli interni. La comprensione di questo lungo sintagma è resa complessa non solo dalle forme nominali del verbo (*formati*, *contenenti*), che deagentivizzano il discorso, ma anche da una struttura interna caratterizzata da fenomeni di annidamento di sintagmi, che si può mostrare così (utilizzando una notazione con parentesi, volta semplicemente a far cogliere la complessità di quello che, nell'insieme, è un sintagma nominale, la cui testa è *angoli*):

gli angoli [formati [**da** lati consecutivi [contenenti punti [**del** piano [interni (**al** poligono)]]]]

L'abbondanza di sintagmi preposizionali e le forme indefinite dei verbi rendono il discorso particolarmente condensato. Per riuscire a gestire questo tipo di espressioni, occorre possedere competenze sia matematiche sia linguistiche: infatti, la decodifica e la successiva comprensione sono possibili solo a chi conosce il significato matematico di ciascun termine (si pensi alla pregnanza semantica di aggettivi come *consecutivi* e *interni* o di sostantivi come *lato* o *piano*) e riesce a orientarsi dal punto di vista sintattico all'interno di simili costrutti linguistici.

Le caratteristiche di precisione e concisione si manifestano nella ricchezza di nomi e aggettivi tipica della lingua della matematica. A questo tratto di base del lessico della

disciplina, spesso si aggiungono anche ulteriori nominalizzazioni, peculiari delle lingue speciali delle scienze in generale: si tratta della sostituzione della classe grammaticale in cui un concetto rientra in maniera più naturale con un'altra (in particolare di verbi con sostantivi), secondo un meccanismo detto da Halliday (1994, 2004) "metafora grammaticale". Ad esempio, in ambito geometrico, l'espressione *sovrapporre* figure piane *in modo che coincidano punto per punto* viene sostituita con il termine unico *congruenza* delle figure piane. Sempre Halliday (2004) chiama «impacchettamento» del testo il fenomeno che nasce da frequenti nominalizzazioni e da altre manifestazioni di condensazione del testo, e «spacchettamento» il processo richiesto di conseguenza per la comprensione. Tale operazione rischia di essere cognitivamente molto complessa per gli allievi, che abitualmente tendono a fare della lingua un uso narrativo, agentivizzato e ricco di verbi.

Infine, il linguaggio matematico è un linguaggio astratto; questo accade perché il referente di ogni discorso matematico non risiede nella realtà empirica: «gli oggetti della matematica non sono direttamente accessibili tramite la percezione, o tramite un'esperienza intuitiva immediata, come lo sono gli oggetti comunemente detti "reali" o "fisici"» (Duval 1993, p. 38). In riferimento specifico alla geometria, Speranza (1997, p. 18) afferma che

> le figure, le immagini mentali, sono gli individui di cui si occupa la Geometria: essa parla però di specie, di classi notevoli di figure. Si tratta di un tipico procedimento di astrazione: raggruppiamo le figure che hanno certe caratteristiche comuni in classi, a ciascuna delle quali corrisponde un concetto collettivo ed eventualmente anche un nome comune (cerchio, triangolo, prisma, …) o un'espressione linguistica che ha la funzione di nome comune (triangolo equilatero, coppie di circonferenze concentriche, …).

Si tratta di una delle sfide più grandi alla cosiddetta 'onnipotenza semantica' della lingua (più prudentemente detta «plurifunzionalità», Berruto & Cerruti 2017), cioè al suo poter parlare di tutto: circoscrivere nel codice che regola il funzionamento della lingua, cioè nella grammatica, l'astratto, l'infinito, per renderlo percepibile e comunicabile (eventualmente cooperando con altri codici, ad esempio con quello figurale); ma non solo:

di quel codice, cioè delle possibilità lessicali e grammaticali, selezionare *una* forma fra le molte possibili per veicolare il messaggio.

Come si può facilmente immaginare, dunque, caratteristiche di universalità, concisione, precisione e astrazione rendono tutt'altro che banali l'interpretazione e la comprensione di un testo da parte di chi sta apprendendo i concetti in gioco. Di fatto si tratta di mettere in conto un costo cognitivo non indifferente, che porta con sé difficoltà ampiamente documentate (Maier, 1993; D'Amore, 1999, 2000; Laborde, 1995; Fornara & Sbaragli, 2013; Franchini, Lemmo & Sbaragli, 2017; Sbaragli & Franchini, 2018; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Ferrari, P.L., 2021). Dati questi elementi di complessità inevitabile, è dunque importante non appesantire la trattazione della disciplina dove non necessario, in modo da non sovraccaricare ulteriormente chi apprende, cercando di essere uniformi nelle scelte ed espliciti nella comunicazione. In concreto, ciò significa che le scelte lessicali e morfosintattiche operate nella stesura di un testo scientifico per la scuola meritano una seria riflessione, perché lettura e comprensione sono processi complessi (come illustrato ampiamente ad esempio da Levorato, 2000; Lumbelli, 2009; Dehaene, 2009, 2019; Demartini & Sbaragli, 2019), che non possono essere dati per scontati per tutti gli allievi. È quindi di primaria importanza individuare ed esaminare i tratti linguistici che possono generare ulteriori nodi di difficoltà nella costruzione del sapere, riprendendo quel filone di indagini mirate su caratteristiche linguistiche, lettura e comprensione del testo scientifico per la scuola che, nei decenni scorsi, è stato sviluppato in particolare nei lavori promossi dal GISCEL (ad esempio GISCEL Lombardia, 1988; Cortelazzo, 1994; Zambelli, 1994), e più di recente in studi come La Grassa & Troncarelli 2014, Troncarelli & La Grassa 2015, e nel ricco volume di Viale (2019).

5.2.1. Il ruolo della definizione

Nei manuali scolastici del corpus del progetto abbiamo rilevato la presenza di diversi enunciati[60] specifici della matematica, che abbiamo scelto di identificare nel seguente

[60] Nei lavori dedicati alla struttura e delle modalità comunicative dei testi ci siamo serviti dei termini Enunciato (o microatto) e Movimento Testuale (o macroatto) nel senso adottato dagli studi di linguistica del testo sviluppati in ambito basilese (cfr. Ferrari, A., 2014, 2019), adattandoli; gli Enunciati

modo: *definizione, proposizione, denominazione, esemplificazione* e *notazione* (Demartini, Ferrari & Sbaragli 2020). Queste categorie non esauriscono tutte le possibilità presenti in un manuale di matematica, ma coincidono con i tipi più caratterizzanti. In riferimento alla specificità del testo matematico va fatta un'ulteriore precisazione: alcuni enunciati possono veicolare più intenzioni comunicative insieme; ciò significa che una stessa parte di testo può assumere il valore di più microatti linguistici (ad esempio può *definire* e, al contempo, *denominare*), risultando particolarmente densa e cognitivamente onerosa per chi legge.

Le parti di manuale oggetto di analisi in questo articolo sono le definizioni, ossia enunciati che stabiliscono il significato di una parola o di una espressione mediante una frase costituita da termini il cui significato si presume già noto. Le definizioni presenti nei manuali scolastici tengono conto della classica visione aristotelica: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* (la definizione si esegue aggiungendo al genere prossimo la differenza che lo specifica). In tali definizioni è sempre possibile riconoscere due parti: il *definiendum*, cioè ciò che si vuole definire, e il *definiens*, cioè l'espressione che serve a formulare e a offrire la definizione. Ad esempio, nella definizione "un poligono è la parte di piano delimitata da una linea spezzata, chiusa, semplice", l'espressione "un poligono" è il *definiendum*, mentre l'espressione "la parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa, semplice" è il *definiens*. Una conseguenza di questa struttura è il fatto che, quando si definisce un oggetto matematico, lo si sta anche denominando, cioè gli si sta assegnando un nome. Una prima caratteristica della definizione è di essere compatta: con poche parole si descrivono elementi che in matematica sono spesso una quantità infinita. Intesa in senso matematico, la definizione ha poi storicamente sempre avuto la caratteristica di contenere solo informazioni necessarie e sufficienti, ossia di non dover risultare ridondante, come indicato dallo stesso Aristotele (1996, p. 238):

> del non porre la definizione in modo valido vi sono due parti: una consiste nel servirsi di un'espressione oscura (infatti chi definisce deve usare l'espressione più chiara possibile, giacché è al fine di conoscere

individuati, infatti, si caratterizzano non solo per il ruolo svolto nell'architettura informativa del testo, ma anche per una connotazione comunicativa peculiare nell'ambito del discorso matematico.

che viene proposta la definizione); la seconda si verifica se è enunciato il discorso definitorio di un numero di cose superiore al dovuto: ché tutto ciò che è posto in aggiunta nella definizione è superfluo.

È dunque fin dagli albori della matematica greca che la definizione matematica ha assunto tali caratteristiche di sinteticità e di eleganza: caratteristiche che in altre discipline non sono ritenute oggi così vincolanti per definire.

Da queste considerazioni emerge in particolare come la definizione possegga al suo interno le caratteristiche di precisione, concisione, universalità e astrattezza descritte nel paragrafo precedente. Anzi, si può dire che rappresenta uno dei formati testuali in cui tali caratteristiche della lingua della matematica si presentano con maggiore evidenza. È inoltre importante osservare che, a livello di struttura sintattica, le definizioni possono assumere forme diverse rispetto all'ordine dei costituenti (Canducci, Demartini, Franchini & Sbaragli 2019a; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020): ad esempio, per quanto lo schema più classico segua l'ordine *definiendum*-copula-*definiens* (ravvisabile in *Il perimetro (p) di un poligono è la misura del suo contorno*), può anche verificarsi la collocazione del *definiendum* in fondo alla frase, come in *La misura del contorno di un poligono si chiama perimetro*. Inoltre, anche sul piano morfologico e su quello lessicale si riscontra una certa variabilità, per cui allieve e allievi non si trovano solo a dover gestire un testo denso e ricco di tecnicismi, ma anche a dover fare i conti con altri aspetti: scelte eterogenee nell'uso dei quantificatori (articoli, aggettivi indefiniti ecc.) e nella rappresentazione della categoria grammaticale del *numero*, ricorso a forme verbali come "si chiama" o "si dice", deissi (ad esempio l'uso di "suo" nella prima delle due definizioni prima riportate), riprese anaforiche (ad esempio il "lo" della seguente definizione, che sta per "poligono": *Il perimetro (P) di un poligono è la misura della lunghezza del confine che lo delimita*). Non dimentichiamo che l'operazione di processare e rappresentarsi una stessa informazione può avere un costo cognitivo e implicazioni ben diverse a seconda della forma linguistica che la veicola: a parità di contenuto, è sufficiente una rapida lettura delle frasi *Ogni poligono con quattro lati si dice quadrilatero* e *Un quadrilatero è un poligono con quattro lati* per cogliere qualcosa di diverso, che apre a diverse interpretazioni e sfumature. Non solo cambia la collocazione del *definiendum* ("quadrilatero") con conseguente spostamento prima o dopo di ciò che è o dovrebbe essere noto al lettore

(l'iperonimo *poligono*, che serve da *definiens*), ma anche il lessico è diverso (non quello tecnico specialistico, ovviamente, ma parole cruciali a livello funzionale e di semantica globale come *ogni*, *un*, *è*, *si dice*).

Insomma, pur essendo quello definitorio un microatto linguistico ampiamente utilizzato in ambito matematico, ciò non significa che la sua forma linguistica sia unica e stabilizzata: anzi, la complessità e la varietà con la quale le definizioni vengono proposte nei manuali − e con cui i giovani apprendenti si trovano a confrontarsi − risulta essere un interessante terreno di indagine. Diventa dunque importante approfondire maggiormente le interazioni fra aspetti linguistici e matematici nelle definizioni, nella convinzione che una sinergia tra le due discipline (linguistica e didattica della matematica) sia essenziale per una riflessione profonda sull'argomento.

5.3. La categoria grammaticale di numero

5.3.1. Il numero nella lingua italiana

Dopo alcune riflessioni di inquadramento più generale sulla lingua della matematica, circoscriviamo ora l'osservazione a un fenomeno specifico, non dipendente in senso stretto dalla semantica dei contenuti toccati né dai tratti della lingua speciale della disciplina: la gestione del *numero* nei testi scolastici. Come scrive Corbett (2000, p. 1, nostra la traduzione), «Il numero è la più sottovalutata delle categorie grammaticali. È ingannevolmente semplice, ed è molto più interessante e varia di quanto la maggior parte dei linguisti si renda conto». Per questo motivo, ci è parso interessante analizzare questo aspetto, la cui manifestazione nei testi può avere implicazioni non secondarie nella rappresentazione del contenuto matematico.

In termini semplici e intuitivi, il *numero* è la categoria grammaticale che serve a codificare e a veicolare la quantità di ciò a cui ci si riferisce (Grandi, 2011a). Come scrivono Salvi & Vanelli (2004, p. 131), «il singolare indica che il referente cui si rimanda è "uno", il plurale indica invece una "pluralità" di referenti». Secondo le grammatiche più tradizionali, e spesso anche nella percezione comune, tale categoria riguarda principalmente nomi e pronomi; in realtà, si tratta di un elemento estremamente pervasivo della lingua, che coinvolge non solo varie altre parti del discorso (aggettivi, articoli, altri

quantificatori, verbi), ma che può anche giocare un ruolo importante nell'interazione con altri codici di rappresentazione, come ad esempio quello figurale, se presenti in un testo. Inoltre, senza approfondire qui l'argomento, è importante segnalare che se in lingua italiana è presente solo l'opposizione fra singolare e plurale (e ciò contribuisce a determinare una certa visione del mondo nei parlanti), in altre lingue tutt'oggi in uso, per lo più tipologicamente molto diverse, sussistono anche altri valori intermedi, ad esempio il *duale* o il *triale*.

Ciò che più ci interessa per gli scopi di questo articolo sono, però, i principali modi e mezzi espressivi offerti dall'italiano per veicolare l'idea di singolare e quella di plurale. Partiamo col dire che si tratta di due categorie diverse, ma strettamente legate, e che non si tratta di categorie sempre pacifiche, per quanto immediate e intuitive da cogliere: ad esempio, infatti, la distinzione di numero caratterizza solamente «ogni categoria concettuale che ammetta la individuazione» (Jackendoff, 1990, p. 29), cioè ogni categoria concettuale per cui ha senso effettuare un conteggio. Semplificando, ciò significa che sostanze quali l'*acqua* o la *farina* (prive di struttura interna percepibile) non si possano trattare come insiemi di elementi, per cui la lingua d'uso, per necessità, ricorre a forme che riproducono di volta in volta la semantica desiderata (*Vorrei un bicchiere d'acqua*); simili nomi, detti "di massa", sono però utilizzabili al plurale in casi e contesti specifici (*l'analisi delle acque*, *l'uso di farine diverse* ecc.). Anche i nomi "collettivi" sono un caso particolare, in quanto designano in forma singolare una pluralità di enti (*gregge*, *folla* ecc.) e accettano a loro volta il plurale (*le greggi*, *le folle*). Infine, da un punto di vista grammaticale e storico-linguistico, ricordiamo la presenza di casistiche particolari come quella dei nomi "sovrabbondanti", cioè provvisti di due plurali, di solito con significati diversi (come *braccio* → *braccia* / *bracci; gesto* → *gesti* / *gesta*) e quella dei *pluralia tantum*, cioè di nomi come *nozze*, *forbici*, *occhiali*, che, pur avendo un referente singolo (per quanto, a ben guardare, in qualche modo composto da più di un elemento), hanno forma plurale.

Dopo questo brevissimo cenno ad alcuni elementi di varietà interna della categoria di *numero*, limitiamo ora le nostre considerazioni ai principali strumenti linguistici per descrivere gli enti per i quali è possibile distinguere singolare e plurale.

5.3.2. Risorse linguistiche per singolare e plurale

A livello cognitivo, per quanto riguarda i nomi e gli altri elementi a esso collegati tramite selezione e accordo grammaticale, l'assegnazione di numero è generalmente piuttosto chiara in quanto basata sulla semantica[61]: se un'entità è presente in un solo esemplare se ne parlerà al singolare (*C'è un cavallo nel recinto*), mentre se il numero di esemplari è maggiore o uguale a due, se ne parlerà al plurale (*Ci sono tre* / *dei* / *alcuni* / *vari… cavalli nel recinto*); va inoltre segnalato l'impiego particolare del singolare per designare un'intera classe in generale (*Il cavallo coopera da millenni con l'uomo*). Proprio per questi tratti di naturalezza ed evidenza nella distinzione è interessante approfondire le scelte operate nella manualistica scolastica di matematica, che spesso, come vedremo, non si attiene a un'aderenza sistematica con la numerosità degli enti di cui parla, ma opera scelte comunicative diverse, le quali possono anche non favorire la rappresentazione semantica del contenuto e, quindi, l'apprendimento dei concetti matematici.

Per approfondire queste considerazioni, esaminiamo ora i principali strumenti linguistici a disposizione in lingua italiana per trasporre le categorie di singolare e plurale. In grammatica, la categoria del numero è marcata innanzitutto sulla desinenza della flessione nominale, che reca anche l'informazione relativa al genere: *lat**o*** / *lat**i***; *diagonal**e*** / *diagonal**i**; gatt**o*** / *gatt**a*** / *gatt**i*** / *gatt**e***. A catena, tutti gli altri elementi (come articoli, aggettivi, verbi…) si accordano o si dovrebbero accordare con il nome cui si riferiscono per realizzare la coesione testuale, cioè un'adeguata rete interna di rapporti (*Il mio gatto rosso dorme* e non **Il miei gatto rossi dormo*).

Come si è accennato, oltre alla marca morfologica, altri elementi linguistici servono a distinguere singolare e plurale: nel loro insieme prendono il nome di *quantificatori*. Come illustra De Santis (2011),

> il termine quantificatori indica una serie di espressioni che forniscono informazioni quantitative sui referenti del nome a cui si collegano e, di conseguenza, sulla frase all'interno della quale quel nome è inserito. Il termine, preso dalla logica, venne adottato dalla grammatica generativa e poi dalla linguistica generale per indicare alcuni operatori delle lingue naturali, espressi da determinanti di vario

[61] La chiarezza nelle ragioni della distinzione non va confusa con la complessità che questo elemento può avere per allieve e allievi non italofoni, che stanno apprendendo il complesso sistema flessivo dell'italiano.

tipo (articoli, numerali cardinali, aggettivi e pronomi indefiniti), accomunati dalla capacità di indicare per quanti individui vale ciò che si predica del nome determinato.

Vediamo ora di esaminare brevemente le diverse modalità di quantificazione più significative e diffuse (rielaborando le descrizioni e le categorie di Salvi & Vanelli, 2004; De Santis, 2011; Salvi, 2013), così da chiarire le categorie generali che ci serviranno poi anche nell'analisi specifica del testo matematico.

Articoli: sono una categoria fra le più semplici in italiano; gli articoli possono essere determinativi (o definiti) singolari e plurali (*il*, *lo*, *la*, *i*, *gli*, *le*) o indeterminativi (o indefiniti) singolari e plurali (*un*, *una* e al plurale *dei*, *delle*, ricorrendo alle preposizioni articolate). L'articolo determinativo (o definito) può assumere anche la funzione di «marcare un nome come esponente di una intera classe, attribuendogli quindi valore generico e non referenziale» (Grandi, 2011b): *La scuola è importante*, *La libertà vale molti sacrifici*.

Quantificatori definiti o forti: esprimono la numerosità in modo preciso (lo sono quindi i numerali *uno*, *due* ecc., in contesti specifici accompagnati con sostantivi che designano unità di misura come *kilo*, *litro* ecc.).

Quantificatori indefiniti intrinseci (universali): hanno solo forma singolare (*ciascuno*, *nessuno*, *ogni*, *qualunque*, *qualsiasi* ecc.) e sono detti anche quantificatori esistenziali con valore distributivo o moltiplicativo, in quanto focalizzano l'attenzione sui singoli elementi di una collettività effettiva; caso a sé fa *tutti*, che rimanda, invece, a un insieme di elementi (o a *tutti* gli elementi nel loro insieme). Sono detti anche universali perché fanno riferimento a una totalità. È ascrivibile a questa categoria anche la combinazione di *uno/-a* o *ciascuno/-a* (con valore di proforma) + complemento partitivo (*Il lato è uno dei segmenti*…), che individua una singola entità nel quadro di una pluralità di altre entità analoghe.

Quantificatori indefiniti non intrinseci (esistenziali): esprimono quantità approssimate secondo una scala graduata non omogenea (lo sono quindi aggettivi e pronomi indefiniti come *pochi*, *alcuni*, *molti*, *tanti*, *vari* ecc., prevalentemente al plurale). Sono anche detti esistenziali in quanto si riferiscono ad almeno un individuo della classe considerata. Fanno

capo a questa categoria anche sostantivi presenti in locuzioni stabilizzate come *un po' di*..., *un mucchio di*... quantificatori generici molto comuni soprattutto nel parlato.

Questo elenco non esaurisce tutte le possibili casistiche né approfondisce le diverse sfumature di significato, ma serve a inquadrare meglio le osservazioni dei paragrafi successivi, in cui verrà evidenziata la presenza di alcune delle risorse linguistiche di quantificazione nel corpus di testi in esame. Come vedremo, tale corpus presenta un uso eterogeneo di esse in relazione ai contenuti esposti, con possibili conseguenze sulla rappresentazione del sapere nel lettore.

Da un primo sguardo alle caratteristiche di queste categorie di quantificazione emerge una peculiarità: laddove non si utilizzino in modo esplicito aggettivi numerali cardinali maggiori di uno, le risorse linguistiche per il plurale non consentono di stabilire il numero esatto degli elementi di cui si sta parlando. Questa caratteristica del linguaggio naturale risulta particolarmente significativa per un'analisi nell'ambito della matematica, in cui spesso entrano in gioco diverse numerosità, che in molti casi coinvolgono l'infinito, e che rappresentano un aspetto saliente della disciplina. Si pensi ad esempio al fatto che un poligono è una figura piana che può avere un numero di lati (e dunque di vertici, di angoli interni ecc.) di qualsivoglia quantità maggiore o uguale a tre: come rendere questa caratteristica attraverso una definizione compatta che, linguisticamente, prevede un'unica distinzione, quella fra singolare ('uno') e plurale ('più di uno', oppure 'tutti')? In effetti, l'unica possibilità sembra quella di esplicitare poi, per ogni caso esaminato, le quantità attraverso frasi diverse da quelle in cui si definiscono gli elementi, poste ad esempio in porzioni di testo successive. Ci dedicheremo brevemente alla questione nel paragrafo 5.5.3.3.

Dal punto di vista del rapporto con la lingua naturale e con i suoi strumenti espressivi, questa caratteristica matematica ha conseguenze problematiche, perché «la cardinalità (potenziale) degli insiemi di figure è ben maggiore di quella delle espressioni linguistiche. Quindi lo strumento linguistico non sarà mai sufficiente a descrivere esaurientemente i fatti geometrici. Ci dobbiamo comunque preoccupare di renderlo il più adeguato possibile» (Speranza 1997, p. 5).

5.4. Omogeneità / disomogeneità nei manuali scolastici e aderenza con il mondo matematico

Data l'insufficienza dello strumento linguistico per parlare esaurientemente della numerosità degli elementi della geometria, è allora interessante esaminare tale aspetto, considerando «l'insostituibile funzione di mediazione-traduzione» (Lavinio, 2004, p. 95) che la lingua per forza di cose ha nella trasposizione disciplinare. Nei prossimi paragrafi esamineremo quindi alcune porzioni di testi scolastici nei quali l'architettura semantica dovrebbe sostenere, sia localmente sia globalmente, il raggiungimento dell'obiettivo comunicativo del manuale di matematica: agevolare l'acquisizione dei concetti. Analizzeremo dunque la resa lessicale e morfologica del *numero*, puntando l'attenzione sull'*omogeneità* / *disomogeneità* delle scelte del testo e sulla conseguente *aderenza* o meno fra forma linguistica e mondo rappresentato.

Per chiarire che cosa intendiamo con *omogeneità* / *disomogeneità* nelle scelte linguistiche per l'espressione del numero è necessario rifarci agli studi retorici, che distinguono, nelle strategie comunicative, la tendenza a ripetere certe parole e certe strutture dalla tendenza, opposta, a variarle, con ricorso a pseudo-sinonimie e a diverse opzioni sintattiche (Mortara Garavelli, 1988/2020, p. 185-188). La tendenza particolarmente ricorrente dell'italiano a privilegiare, per sua stessa tradizione, la *variatio* rispetto alla ripetizione e alla simmetria (lessicale, strutturale) si riscontra anche nei testi matematici per la scuola, con possibili conseguenze in termini di decodifica e interpretazione del testo. Con *aderenza* forma-contenuto ci riferiamo al risultato concreto della trasposizione linguistica del contenuto matematico: un testo è tanto più aderente al contenuto quanto più vi è una rispondenza globale precisa alla realtà extra-testuale cui si riferisce.

Ora proviamo a ricondurre queste considerazioni alle questioni oggetto di questo articolo, attraverso un esempio: sappiamo che un poligono presenta più di un angolo, ma un testo ne parla al singolare; presenta anche più di un lato (lo stesso numero degli angoli), ma, questa volta, il testo ne parla al plurale. Il testo è globalmente omogeneo dal punto di vista del trattamento della numerosità? È aderente rispetto al contenuto che si vuole trasporre? Sono questi gli interrogativi su cui focalizzeremo l'attenzione attraverso l'esame di alcuni esempi significativi.

5.5. L'analisi della categoria del numero dei manuali scolastici

5.5.1. Il corpus di manuali scolastici

Poiché l'argomento poligoni è proposto a spirale nella scuola, si è potuto attingere da un bacino di manuali relativi a sette anni di scolarizzazione. Il corpus complessivo del progetto consta di 142 manuali scolastici di matematica in lingua italiana, così suddivisi:

– 41 manuali di II e III anno di scuola primaria italiani;

– 42 manuali di IV e V anno di scuola primaria italiani;

– 46 manuali di I, II e III anno di scuola secondaria di primo grado italiani;

– 7 manuali di I, II e III anno di scuola secondaria di primo grado del Canton Ticino (Svizzera);

– 5 manuali dalla II alla VI primaria del Canton Grigioni (Svizzera);

– 1 manuale del I anno di scuola secondaria di primo grado del Canton Grigioni (Svizzera).

In questo contributo focalizziamo l'attenzione sulla parte del corpus relativa a manuali scolastici in uso nella scuola primaria e secondaria di primo grado italiana. Non vengono dunque compresi i 13 manuali provenienti dalla Svizzera. Inoltre, vi è da considerare che l'analisi proposta in questo articolo coinvolge esclusivamente la parte introduttiva dell'argomento poligoni dei manuali della scuola primaria italiana; in tale parte vengono solitamente affrontati gli elementi dei poligoni: vertici, lati, diagonali, angoli ecc. I manuali del corpus italiano nei quali viene trattato questo argomento sono 94 su 129, così suddivisi nei vari anni:

– 10/20 manuali di II scuola primaria (in seguito denominata II SP);

– 21/21 manuali di III scuola primaria (in seguito denominata III SP);

– 21/21 manuali di IV scuola primaria (in seguito denominata IV SP);

– 19/21 manuali di V scuola primaria (in seguito denominata V SP);

– 21/21 manuali di I scuola secondaria di primo grado (in seguito denominata I SSPG);

– 2/21 manuali di II scuola secondaria di primo grado (in seguito denominata II SSPG).

Volendo poi trattare nello specifico gli aspetti di numero legati alle definizioni linguistiche degli elementi del poligono, abbiamo scelto di escludere dall'analisi i manuali nei quali tali elementi non vengono definiti, ma solo denominati con riferimenti a esempi visivi di

tipo figurale. Per questo motivo, sono stati esclusi dall'analisi i 10 manuali di II SP, 1 manuale di III SP, 2 manuali di V SP e i 2 di II SSPG. Va considerato infine che vi sono anche casi in cui sono presenti scelte miste, ossia alcuni enti vengono definiti mentre altri solo denominati, che sono stati inclusi nell'analisi. Il corpus oggetto di analisi in questo articolo è formato in definitiva da 79 porzioni di manuali scolastici, dalla III SP alla I SSPG.

5.5.2. Il contenuto matematico di analisi: gli elementi di un poligono

Gli enti geometrici che è possibile definire per un poligono sono molteplici: i lati, gli angoli (interni ed esterni), i vertici, le altezze, le diagonali, il contorno, la superficie. In molti casi si tende anche a definire l'ente geometrico *base*, nonostante presenti diverse problematiche dal punto di vista matematico e didattico (Sbaragli, 2012). A questi enti vanno aggiunte poi le grandezze *perimetro* e *area*. Dal punto di vista della numerosità, gli enti geometrici di un poligono presentano caratteristiche non uniformi. In generale, in un poligono di n lati si trovano n angoli interni, n vertici, n altezze, n basi, $2n$ angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo n), e un numero di diagonali dato dall'espressione $n\,(n - 3) / 2$. Se consideriamo ad esempio un poligono di 6 lati, esso avrà dunque 6 angoli interni, 6 vertici, 6 altezze, 6 basi, 12 angoli esterni (dei quali se ne considerano di solito solo 6), 9 diagonali. Inoltre, un qualsiasi poligono ha sempre un solo contorno e una sola superficie; da quest'ultima constatazione si deduce in particolare che le grandezze perimetro e area, associate rispettivamente alla lunghezza del contorno del poligono e alla grandezza che caratterizza la superficie del poligono, siano presenti in quantità uguale a uno.

Ora, i manuali scolastici di geometria oggetto dell'analisi solitamente presentano, in una porzione unitaria di testo, diversi elementi del poligono; questo comporta, per ognuno degli enti per cui è possibile farlo, la scelta di utilizzare il singolare o il plurale. Tali scelte possono poi risultare omogenee (utilizzo del plurale o utilizzo del singolare per tutti gli enti), o disomogenee (utilizzo del singolare per alcuni enti e del plurale per altri). Per questo motivo, le nostre osservazioni si riferiranno solo a quegli enti per i quali è possibile scegliere di usare sia il singolare sia il plurale.

In questo senso, cercheremo di condurre un'analisi, dal punto di vista dell'omogeneità e disomogeneità linguistica di *numero*, delle porzioni di testo dei manuali del corpus nei quali vengono definiti gli elementi del poligono. In particolare, osserveremo come le disomogeneità di *numero* producano una mancanza di *aderenza* fra la forma linguistica e il contenuto semantico del mondo che si vuol rappresentare. Prima di addentrarci in questa analisi, tuttavia, è opportuno riconoscere che spesso, nei manuali del corpus, informazioni riguardanti la numerosità degli elementi di un poligono non sono presenti solo all'interno delle definizioni. Ulteriori informazioni possono infatti essere rintracciate, sotto forma di proposizioni o esercizi, in posizioni antecedente o più spesso successiva rispetto alle definizioni degli enti. Insomma, tali ulteriori informazioni non si trovano nelle porzioni di testo in cui vengono definiti gli elementi del poligono, ma in porzioni diverse (paragrafo 5.5.3.3).

5.5.3. La lente di analisi: omogeneità e disomogeneità linguistica di numero nelle definizioni

Dal punto di vista dell'omogeneità e della disomogeneità di *numero* nel definire gli enti di un poligono presenti in numero superiore a uno, le porzioni dei manuali scolastici del corpus potrebbero rientrare nelle seguenti tre categorie: *omogenei singolare*, *omogenei plurale* e *disomogenei*. Tuttavia, dall'analisi dei manuali a disposizione non si è riscontrata la presenza di testi in cui le definizioni dei vari enti vengono fornite tutte al singolare, per questo tale categoria non viene considerata nell'analisi. È infatti emersa la tendenza ad associare l'uso omogeneo del singolare esclusivamente ad atti denominativi, focalizzati cioè sull'introduzione dei termini in gioco (lato, vertice ecc.), veicolata attraverso l'ausilio di una figura, che propone *un esempio* di ente indicato con *una* freccia (Figura 11, tratta da un manuale di II SP), o con altri tipi di segmenti orientati. Tali esempi non rientrano nella nostra analisi, che si è concentrata sull'atto linguistico della definizione, senza mettere a tema il rapporto con la figura, e focalizzandosi sulle seguenti due categorie: *omogenei plurale* e *disomogenei*.

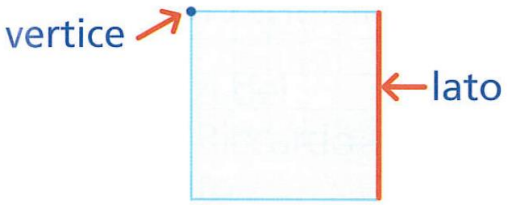


Fig. 11 – Esempio di utilizzo omogeneo del singolare in II SP in un atto denominativo (manuale 17_2 del corpus[62]).

Omogenei plurale

In questa categoria rientrano casi in cui si sceglie di utilizzare (per tutti gli enti in cui è possibile farlo) esclusivamente il plurale, mentre enti come il contorno e la superficie, e le grandezze perimetro e area sono ovviamente espresse, qualora si scelga di definirle, al singolare. Vi è quindi aderenza fra numerosità dell'oggetto e numerosità della lingua, pur non potendo esplicitare in tale definizione il numero preciso degli elementi. In Figura 12 è mostrato un esempio, tratto da un manuale di V SP, in cui si definiscono gli enti lati, vertici, angoli, diagonali e altezze al plurale:

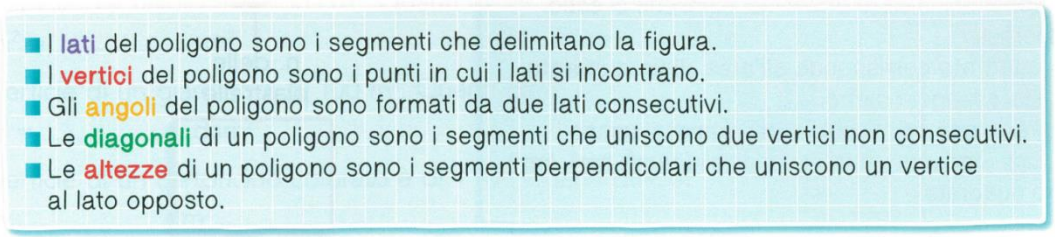

- I **lati** del poligono sono i segmenti che delimitano la figura.
- I **vertici** del poligono sono i punti in cui i lati si incontrano.
- Gli **angoli** del poligono sono formati da due lati consecutivi.
- Le **diagonali** di un poligono sono i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi.
- Le **altezze** di un poligono sono i segmenti perpendicolari che uniscono un vertice al lato opposto.

Fig. 12 – Esempio di utilizzo omogeneo del plurale in V SP (manuale 8_5 del corpus).

Dal punto di vista della nostra analisi, la porzione di testo considerata è linguisticamente omogenea nell'utilizzo del plurale. Gli enti definiti sono presenti in numero maggiore di uno e la lingua riflette questo stato di cose parlandone sempre al plurale, adottando, inoltre, la struttura simmetrica iterata *definiendum*-copula-*definiens* (schema classico delle

[62] La catalogazione dei manuali del corpus del progetto *Italmatica* è avvenuta attraverso l'attribuzione di un codice di identificazione univoco composto da due numeri separati da "_": il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni su base nazionale relativa all'anno 2017/2018, il secondo numero indica invece il grado scolastico corrispondente. I titoli meno adottati per ciascun sottogruppo sono stati codificati in modo leggermente diverso. Anche in questo caso, a ciascun libro è stato attribuito un codice di identificazione composto da due numeri separati da "_", ma a questo codice è stata anteposta la lettera "c", abbreviazione di *coda*; inoltre, anche in questo caso il primo numero indica la posizione del titolo nella graduatoria delle adozioni, ma ordinata a partire dal meno adottato.

definizioni): “I lati... sono i segmenti…”; “I vertici… sono i punti” e così via. Questa regolarità morfologica (unita alla regolarità sintattica) permette al lettore di processare e di associare immediatamente l’informazione considerando la pluralità degli enti: la desinenza stessa dei vari elementi che vengono definiti, per altro evidenziati e colorati, e gli altri elementi linguistici accordati (come gli articoli) veicolano il fatto che in un poligono esistono più lati, vertici, angoli, diagonali e altezze, senza che chi legge debba operare inferenze. In sostanza, il plurale linguistico rispecchia il plurale reale. Cosa diversa sarebbe stata se si fosse scelto di avvalersi di un’altra modalità possibile, citata al paragrafo 5.3.2, cioè quella, che vedremo in seguito, di parlare di un ente al singolare intendendo designare un’intera classe (“Il lato è…”). Poiché due caratteristiche fondamentali delle lingue delle scienze sono la precisione e la referenzialità, è opportuno chiedersi quanto il discostarsi da esse laddove non necessario possa generare un ulteriore appesantimento per la comprensione (evitabili).

Disomogenei

In questa categoria rientrano casi in cui, nella stessa porzione di testo, si utilizza il plurale per alcuni enti e il singolare per altri, pur trattandosi di enti equinumerosi o comunque presenti nel poligono in quantità maggiore di uno, come nel caso delle diagonali. In Figura 13 è mostrato un esempio, tratto da un manuale di IV SP, in cui si utilizza il plurale per gli enti lato e diagonale, e il singolare per gli enti vertice e angolo, pur essendo tutti presenti in quantità maggiori di uno:

Un poligono è caratterizzato dai seguenti elementi:

- ha come **contorno** una linea **spezzata chiusa**;
- i segmenti che formano la linea spezzata chiusa si chiamano **lati** del poligono;
- il punto in cui due lati si incontrano si chiama **vertice**;
- la parte racchiusa da due lati consecutivi si chiama **angolo**;
- i segmenti che uniscono due vertici non consecutivi, cioè non vicini, si chiamano **diagonali**;
- la somma delle misure dei lati del poligono è il **perimetro**;
- la regione interna del poligono è la **superficie**.

Fig. 13 – Esempio di utilizzo disomogeneo del singolare / plurale in IV SP (manuale 10_4 del corpus).

La porzione di testo considerata risulta linguisticamente disomogenea nella gestione della categoria grammaticale di *numero*. Questa disomogeneità produce una mancanza di aderenza tra la forma linguistica e il mondo geometrico che si vuole rappresentare, perché un lettore in fase di apprendimento potrebbe pensare che in un poligono esistano più lati e diagonali, ma un solo angolo e un solo vertice, cosa che è chiaramente falsa. L'esempio qui riportato mostra cambiamenti molto evidenti nei modi di offrire le definizioni: in particolare, variazioni nel trattamento del *numero* (con conseguente scostamento dalla realtà extra-testuale) che si collocano di volta in volta in strutture sintattiche diverse (basti osservare che il primo punto-elenco inizia addirittura con «ha», ricollegandosi alla frase introduttiva, mentre gli altri, in cui il *definiens* è in ultima posizione, alternano diverse scelte lessicali, come l'alternanza – «è / si chiama» − e strutturali). Sebbene a una prima lettura possano sembrare differenze minime, in realtà, se ci si colloca dal punto di vista di chi legge per apprendere, la questione può avere un certo rilievo: ammettendo la precisione e il rigore del linguaggio della matematica, perché qui le cose sembrano andare diversamente? Che cosa richiede il testo in termini di collaborazione ai fini della corretta comprensione? Non sarebbe forse opportuno che il manuale scolastico agevolasse l'interpretazione e non la affaticasse nei luoghi in cui ciò non è né necessario né proficuo? I rilievi quantitativi del prossimo paragrafo danno la misura della distribuzione del fenomeno nei libri di testo.

5.5.3.1. La distribuzione del fenomeno nei libri di testo

La seguente tabella (Tabella 9) mostra sul piano quantitativo i risultati dell'analisi del corpus di manuali dal punto di vista delle categorie *omogenei plurale* e *disomogenei*:

	Numero di manuali	**Omogenei plurale**		**Disomogenei**	
		Numero di manuali	%	Numero di manuali	%
III SP	20	6	30,0%	14	70,0%
IV SP	21	7	33,3%	14	66,7%
V SP	17	8	47,1%	9	52,9%
I SSPG	21	11	52,4%	10	47,6%
Totale corpus di analisi	**79**	**32**	**40,5%**	**47**	**59,5%**

Tab. 9 – Suddivisione nelle categorie omogenei plurale e disomogenei dei manuali del corpus.

Come emerge dalla tabella, la percentuale di libri che definiscono gli elementi dei poligoni in modo omogeneo dal punto di vista del numero (40,5%) è più bassa della percentuale di libri che li trattano in modo disomogeneo (59,5%). Più della metà dei libri di testo del corpus presenta dunque criticità di aderenza fra la numerosità degli elementi del poligono espressa in forma linguistica e numerosità reale degli elementi nell'ambito della matematica. Questo dato è significativo perché, nella nostra interpretazione, significa che più della metà dei libri di testo a disposizione opera scelte linguistiche non aderenti al mondo matematico, che possono incidere sulla rappresentazione semantica derivata dal testo e, poi, sulla concettualizzazione degli elementi geometrici in gioco.

Nella categoria *omogenei plurale* si nota una tendenza crescente: man mano che aumenta l'anno di scolarità, aumenta anche la percentuale di libri di testo nei quali gli elementi del poligono vengono trattati utilizzando, in tutti i casi in cui è possibile farlo, il plurale, passando da un 30,0% in III SP a un 52,4% in I SSPG. Questa tendenza crescente fa sì che, in modo speculare, nella categoria *disomogenei*, la distribuzione interna presenti una tendenza decrescente: la percentuale di libri in cui gli elementi dei poligoni vengono definiti in modo disomogeneo scende da un 70,0% in III SP a un 47,6% in I SSPG. Se si considera la minore dimestichezza che hanno i bambini più piccoli con la lingua (in

generale e scientifica in particolare), con le sue variazioni e con il processo di lettura, la maggior disomogeneità nei testi per la III primaria è ancor più paradossale e preoccupante. Proprio perché è la categoria di maggiore interesse, nel prossimo paragrafo analizzeremo più in dettaglio la *disomogeneità* dei testi nei manuali scolastici del corpus.

5.5.3.2. L'uso disomogeneo del singolare/plurale nel definiendum e nel definiens

Come mostrato in Tab. 1, in 47 libri su 79 (il 59,5%) accade che in una stessa porzione di testo le definizioni di alcuni enti vengano date al singolare (scegliendo di portare l'attenzione su *un* rappresentante della categoria), mentre altre al plurale, pur trattandosi in ogni caso di enti con una numerosità maggiore di uno. Dall'osservazione dei testi abbiamo scelto di creare due sottocategorie di analisi[63]:

1. Disomogeneità dovuta all'uso del singolare / plurale nel *definiendum* (sottocategoria *Definiendum*).
2. Disomogeneità dovuta all'uso di quantificatori nel *definiens* (sottocategoria *Definiens*).

1. *Definiendum*. In questa categoria l'oscillazione nel numero è a carico del *definiendum*. Ad esempio, come emerge nella Figura 14 (tratta da un manuale di III SP), in una stessa porzione di testo si ritrova il termine *lati*, al plurale, e *angolo interno* e *vertice* al singolare. La pluralità in riferimento ai lati e la singolarità in riferimento all'angolo interno e al vertice è inoltre rafforzata dall'indicazione simbolica tra parentesi. Anche assumendo che chi legge sappia decodificare correttamente il simbolismo geometrico utilizzato per indicare i lati (due lettere maiuscole con un trattino sopra) − benché il trattino sopra tradizionalmente rappresenti la lunghezza del lato e non il lato stesso −, i vertici (una lettera maiuscola) e gli angoli (una lettera maiuscola con un accento circonflesso sopra), il fatto che vengano elencati più lati, e un solo vertice e un solo angolo interno, potrebbe consolidare un'interpretazione errata riguardo alla numerosità di questi elementi in un poligono.

[63] I 47 libri del corpus caratterizzati da disomogeneità si distribuiscono equamente fra le due categorie (24 *Definiendum* e 23 *Definiens*), mostrando una preferenza per il tipo *Definiens* in IV SP (10 libri) e *Definiendum* in I SSPG (10 libri).

I **lati** sono i segmenti che formano il confine ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$).

Il **vertice** è il punto di incontro di due lati (B).

L'**angolo interno** è la parte di piano compresa tra due lati ($\hat{C}$).

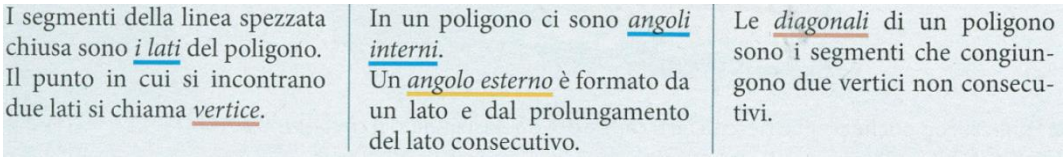
La **superficie** è la parte di piano delimitata dal confine.

Fig. 14 – Disomogeneità dovuta all'uso del singolare / plurale nel definiendum (manuale c1_3 del corpus).

In questo esempio si può osservare l'oscillazione di numero nel quadro di una struttura definitoria costante e ripetuta a livello sintattico: *definiendum*-copula-*definiens*. Il *definiendum*, cioè il nuovo, ciò a cui si deve attribuire l'informazione, è sempre introdotto dall'articolo determinativo, che, alternando le forme plurale e singolare, contribuisce a generare una semantica ambigua, perché il salto dall'uno all'altro potrebbe generare un elemento di difficoltà: il giovane lettore inizia a ragionare al plurale per gli enti plurali quando si parla di lati, mentre poi deve gestire per due volte una struttura singolare che però rimanda comunque a enti plurali, e finire con una corrispondenza singolare con singolare per la superficie. Tale mancata aderenza sistematica di numero fra la rappresentazione linguistica degli enti matematici e gli enti matematici stessi potrebbe indurre il lettore in fase di apprendimento a credere che in un poligono esistano solo un vertice e solo un angolo interno, a fronte, invece, di una pluralità di lati. Andando più in profondità, il lettore dovrebbe essere in grado di dedurre in modo autonomo che, poiché in un poligono ci sono necessariamente almeno tre lati (quattro nel caso in Fig. 14), e poiché il vertice è il punto di incontro fra due di questi, allora in un poligono esistono necessariamente più vertici. Analogo ragionamento dovrebbe essere effettuato nel caso dell'angolo interno. È ovvio che il carico cognitivo richiesto per ricostruire queste informazioni implicite nel testo è maggiore di quello che verrebbe richiesto se si

esplicitasse la numerosità degli enti vertice e angolo interno, anche solo utilizzando regolarmente la desinenza al plurale. In sintesi, il lettore si trova di fronte a due sfide interpretative: la prima è data dalla sua capacità di districarsi all'interno di una disomogeneità di tipo linguistico; la seconda è legata alla capacità di effettuare opportune inferenze relative all'ambito geometrico di cui si sta parlando.

Anche l'esempio mostrato in Figura 15 (tratto da un manuale di I SSPG) risulta problematico. I termini *lati*, *angoli interni* (di quest'ultimo non vi è una definizione) e *diagonali* sono dati al plurale, mentre *vertice* e *angolo esterno* sono al singolare. Inoltre, i *definienda* sono collocati in diverse posizioni all'interno della frase, contrariamente all'esempio precedente: talvolta nella sua collocazione più naturale, cioè all'inizio («Un *angolo esterno*…»), altre volte in posizione finale («… si chiama *vertice*»). Questi cambiamenti insieme a quelli riguardanti il lessico (*è* / *sono*; *ci sono*; *si chiama*; *è formato*) richiedono a chi legge di volta in volta di dover gestire strutture linguistiche e scelte lessicali diverse.


I segmenti della linea spezzata chiusa sono *i lati* del poligono. Il punto in cui si incontrano due lati si chiama *vertice*.

In un poligono ci sono *angoli interni*. Un *angolo esterno* è formato da un lato e dal prolungamento del lato consecutivo.

Le *diagonali* di un poligono sono i segmenti che congiungono due vertici non consecutivi.

Fig. 15 – Disomogeneità dovuta all'uso del singolare / plurale nel definiendum (manuale 19_6 del corpus).

Il risultato di queste scelte è quantomeno confuso, soprattutto nel rapporto fra angoli interni e angoli esterni: perché nel caso degli angoli interni si è scelto di esplicitare la pluralità dell'ente nella desinenza del termine (e solo in questo caso non c'è articolo né altro quantificatore), mentre per l'angolo esterno non vi sono indicatori linguistici di pluralità espliciti (anzi, è introdotto dall'articolo «un»: generico, sì, ma certamente non marcatore specifico di pluralità)? Nuovamente, ci sembra che le informazioni lasciate implicite vadano a caricare il lettore di uno sforzo cognitivo non necessario nel corso dell'interpretazione di un testo già di per sé complesso, in cui il tratto plurale-singolare ha un valore importante nella costruzione del sapere È infatti confermato dagli studi sull'argomento (come Lumbelli, 1989, cui rimanda Lavinio, 2004, pp. 132-136) che «la

comprensibilità di un testo viene considerata tanto maggiore quanto più sono semplici e meno numerose le inferenze da fare» (Lavinio, 2004, p. 132).

2. *Definiens*. In questa categoria l'oscillazione nel numero è a carico del *definiens*. In particolare rientrano casi in cui si sceglie di utilizzare, nel *definiens* della definizione di alcuni elementi del poligono, quantificatori indefiniti come *ogni* (di forma indeclinabile al singolare ma con valore plurale), *ognuno*, *ciascuno*, *uno dei* ecc. Tali quantificatori inducono a volte concordanze grammaticali al singolare (come nel caso di *ogni*), altre volte al plurale (come nel caso di *ciascuno dei* o di *uno dei*), ma indicano comunque a livello semantico una pluralità, una totalità di elementi, di cui si pone all'attenzione l'aspetto moltiplicativo o distributivo (cioè il fatto che gli elementi fanno parte di un insieme); nella stessa porzione di testo, altri elementi vengono invece trattati esclusivamente al singolare. Si tratta, anche in questi casi, di porzioni di testo nelle quali non vi è aderenza fra veste linguistica e mondo matematico che si vuol rappresentare. Va osservato che non si sono riscontrati casi di porzioni di manuale disomogenee nelle quali si sia scelto di utilizzare il quantificatore indefinito *tutti*, che rimanderebbe a un'effettiva totalità.

Nel seguente esempio (Fig. 16, tratta da un manuale di IV SP), l'utilizzo del quantificatore *ogni* in riferimento al termine *segmento* e all'espressione *punto di incontro*, fa pensare alla presenza di un numero di lati e vertici di cardinalità maggiore di uno; nel caso del vertice, inoltre, questa interpretazione è rafforzata dall'esplicitazione fra parentesi, nella quale vengono indicati a livello simbolico cinque vertici. Al contrario, l'assenza di quantificatori indefiniti nei casi dell'angolo interno e della diagonale (introdotti da articolo: *La parte*…; *Il segmento*…), non porta il lettore a considerare una pluralità di enti.

- Ogni segmento della linea spezzata chiusa che delimita il poligono si chiama **lato**.
- Ogni punto di incontro tra due lati si chiama **vertice** e si indica con una lettera maiuscola (A, B, C, D, E).
- La parte di piano delimitata da due lati consecutivi, cioè due lati che hanno un vertice in comune, è un **angolo interno**.
- Il segmento che unisce due vertici non consecutivi si chiama **diagonale**.

Fig. 16 – Disomogeneità dovuta all'uso di quantificatori (manuale 13_4 del corpus).

Anche nell'esempio mostrato in Fig. 17 (tratto da un manuale di IV SP), si osserva una disomogeneità di *numero*. L'utilizzo del quantificatore indefinito *ciascuno dei* nel *definiens* della definizione di *lato* riproduce esattamente la pluralità dell'ente definito: tale aggettivo indica, infatti, in modo esplicito la presenza di più lati (presi singolarmente) in un poligono. Lo stesso grado di chiarezza non si può riscontrare invece nei *definiens* e *definiendum* del vertice, della diagonale e dell'angolo, nei quali non sono presenti indicatori linguistici di pluralità: questi enti sono introdotti dall'articolo determinativo in forma singolare («è *il* punto», «è *il* segmento», «è *lo* spazio») e la decodifica delle informazioni di numerosità è lasciata implicita, a carico del lettore.

- **LATO** (ℓ) → È ciascuno dei segmenti che compongono la linea spezzata chiusa.
- **VERTICE** (A, B, C...) → È il punto di incontro di due lati.
- **DIAGONALE** (d) → È il segmento che collega due vertici non consecutivi.
- **ANGOLO** ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$...) → È lo spazio compreso tra due lati che hanno in comune un vertice.
- **SUPERFICIE** → È la parte di piano all'interno della linea spezzata chiusa.

Fig. 17. Disomogeneità dovuta all'uso di quantificatori indefiniti (manuale 16_4 del corpus).

In aggiunta alle criticità prima elencate, possiamo evidenziare come anche le indicazioni di tipo simbolico siano disomogenee fra loro: perché nel caso del lato e della diagonale si utilizza un'unica lettera (rispettivamente *l* e *d*), mentre nel caso del vertice e dell'angolo si utilizzano più lettere (*A*, *B* e *C*, seguite tra l'altro dai tre puntini a segnalare che la lista non è conclusa), inducendo il lettore a intuire la pluralità nella numerosità dell'ente? Ci si trova di fronte a una serie di informazioni codificate in forma conflittuale, che possono generare confusione in fase di apprendimento.

5.5.3.3. La numerosità degli elementi del poligono in altri parti del manuale

Nei manuali del corpus, come già anticipato, le informazioni riguardanti la numerosità degli elementi di un poligono non sono presenti solo all'interno delle definizioni. Ulteriori informazioni si possono rintracciare in altre posizioni e possono sostanzialmente essere dei seguenti due tipi: *generiche di numero* e *specifiche di numero*.

Generiche di numero. Si tratta di frasi nelle quali vengono fornite informazioni generiche riguardanti la numerosità degli elementi di un poligono, senza esplicitazioni specifiche di numero. Il seguente esempio tratto da un manuale di III SP (Fig. 18) presenta una proposizione che mette in relazione il numero dei lati con quello degli angoli, senza coinvolgere i vertici del poligono e senza indicarne specificamente il numero in funzione

del tipo di poligono. Il tutto servendosi della parola *numero*, ripresa poi anaforicamente dalla proforma *quello* («a quello» 'al numero').

- In ogni poligono il numero dei lati è uguale a quello degli angoli.

Fig. 18 – Esempio di informazioni generiche che coinvolgono la numerosità degli enti in un manuale di III SP (manuale 8_3 del corpus).

L'informazione riguardante la pluralità degli enti, pur essendo aderente al mondo matematico, non risulta completa; anche in questo caso non è chiaro che cosa ci si aspetti da un allievo di terza primaria. Che sia in grado di ricostruire la semantica completa estendendo opportunamente l'informazione data? Oppure che consideri solo quest'informazione parziale, che però non è matematicamente esaustiva?

Tra le porzioni di testo diverse dalla definizione che però veicolano informazioni relative alla numerosità degli enti rientrano anche quelle dedicate all'etimologia. Vediamo un breve esempio (Fig. 19), tratto da un manuale di IV SP, in cui viene esplicitato il significato etimologico della parola *poligono* (*poli* 'tanti', *gono* 'angoli'):

Fig. 19 – Esempio di informazioni etimologiche fornite in un manuale di IV SP (manuale 7_4 del corpus).

Specifiche di numero. In questa categoria rientrano proposizioni in cui sono presenti informazioni puntuali sulla numerosità di uno specifico elemento dei poligoni, o sul numero degli elementi in funzione del tipo di poligono. Ad esempio frasi che riportano il numero di diagonali di un poligono in funzione degli *n* lati, come quelle in Figura 20, tratte da un manuale di I SSPG.

- In un poligono di n lati per ogni vertice si hanno $(n - 3)$ **diagonali**.
- In un poligono di n lati in tutto si hanno $\frac{n \times (n - 3)}{2}$ **diagonali**.

Fig. 20 – Esempio di informazioni specifiche di numero presenti in un manuale di I SSPG (manuale 9_6 del corpus).

Va considerato che in alcuni casi queste informazioni sono proposte in modo più induttivo, come esercizi da completare da parte del lettore. Spesso tali informazioni sono di tipo classificatorio: si tratta cioè di classificazioni riportate in tabelle o elenchi, spesso poste sotto forma di esercizio da completare (come nell'esempio in Figura 21, tratto da un manuale di V SP), nelle quali i poligoni vengono classificati in base al numero di lati, vertici, angoli. Queste considerazioni in alcuni casi sono presentate per determinati e specifici esempi di poligoni, in altri casi sono generalizzate (come nell'esempio in Figura 22, tratto da un manuale di I SSPG).

Completa.

triangoli n. lati: ..... n. angoli:	quadrilateri n. lati: ..... n. angoli:	pentagono n. lati: ..... n. angoli:	esagono n. lati: ..... n. angoli: .....
ettagono n. lati: ..... n. angoli:	ottagono n. lati: ..... n. angoli:	ennagono n. lati: ..... n. angoli:	decagono n. lati: ..... n. angoli: .....

Fig. 21 – Esempio di informazioni specifiche di numero fornite in un manuale di V SP (manuale 9_5 del corpus).

Il nome di un poligono dipende dal numero di lati da cui è formato.
Un triangolo ha tre lati, un quadrilatero quattro, un pentagono cinque e così via. In generale un poligono con 13, 14, 15 o più lati è genericamente indicato come poligono di *n* lati dove *n* indica il numero di lati.

Numero lati	Nome poligono	Diagonali	Somma angoli interni
3	triangolo	0	180°
4	quadrilatero	2	360°
5	pentagono	5	540°
6	esagono	9	720°
8	ottagono	20	1080°
10	decagono	35	1440°
12	dodecagono	54	1800°
n	poligono di n lati	$[n \cdot (n-3)] : 2$	$180° \cdot (n-2)$

Fig. 22 – Esempio di informazioni specifiche di numero riguardanti la numerosità di alcuni elementi, in cui viene effettuata una generalizzazione al poligono di *n* lati (manuale 6_6 del corpus).

Entrare troppo nello specifico di queste ulteriori informazioni di numero fornite all'interno dei manuali esula dagli scopi di questo contributo, ma è comunque interessante notare che nel 73,4% dei manuali analizzati (58 manuali su 79), il lettore ha la possibilità di coordinare le informazioni di *numero* che ricava dalle porzioni in cui si definiscono gli elementi del poligono con altre informazioni presenti in modalità e posizioni varie all'interno del manuale e presentate con gradi più o meno profondi di specificità.

5.6. Conclusioni

I rilievi sulla gestione della categoria del *numero* nei manuali scolastici di matematica – e specificamente la considerazione del tratto singolare-plurale nelle definizioni degli elementi del poligono – permettono alcune riflessioni conclusive sull'argomento, estendibili più in generale alla veste linguistica dei testi matematici e alle sue implicazioni. In sintesi, potremmo dire che la categoria grammaticale del *numero*, in italiano veicolata dal lessico e dalla morfologia, sembra avere un ruolo significativo nella trasmissione, e poi nella comprensione e nella costruzione, del sapere matematico in gioco; pertanto, le scelte operate dai libri di testo possono non essere ininfluenti nella ricostruzione semantica da parte degli allievi, spesso non ancora completamente pronti a gestire la lettura di testi

contenutisticamente complessi, e ricchi di impliciti e di inferenze da elaborare. Dall'analisi condotta in questo contributo emerge in generale come spesso non vi sia sufficiente attenzione, da parte dei costruttori di significato che operano sul manuale di geometria, nell'effettuare scelte linguistiche di numero omogenee e aderenti alla realtà extra-testuale, in questo caso matematica. La maggior parte dei manuali analizzati, infatti, realizza scelte linguistiche disomogenee (dal punto di vista lessicale e morfologico) e non sempre in sintonia con il contenuto matematico che si vuole esporre.

Le osservazioni sul *numero* confermano la bontà di un lavoro autenticamente interdisciplinare sul testo scolastico. Infatti, come confermano le ricerche, la lingua esercita un ruolo fondamentale nell'insegnamento-apprendimento della matematica: proprio per questo è significativo indagare i tratti linguistici peculiari e critici dei testi scolastici mettendoli in relazione col contenuto e con le possibili difficoltà di lettura e comprensione che da essi possono derivare, senza trascurare quelli a prima vista minori. Sulla scia di Lumbelli (1989, cit. in Lavinio, 2004, p. 133), è insomma utile individuare e studiare quegli «indicatori testuali delle difficoltà di comprensione» che «comportano un carico cognitivo notevole per chi legge», in particolare con l'intento di riflettere sul testo scolastico scientifico per poi intraprendere un lavoro scientificamente fondato di ripensamento della manualistica e di alcune scelte didattiche.

Rispetto a questo scenario, è utile che i docenti di matematica (e di altre discipline scientifiche) e quelli di italiano siano sempre pronti a considerare in ottica trasversale le occasioni di apprendimento, dialogando fra loro secondo quella prospettiva interdisciplinare chiaramente presentata in Colombo & Pallotti (2014). L'attenzione ai fenomeni linguistici anche apparentemente minori o difficili da cogliere può, infatti, essere la chiave per sostenere e agevolare la costruzione del sapere in allieve e allievi dai più diversi profili di competenza. In concreto, rispetto al libro di testo (spesso oggetto di discussione, ma comunque presente nelle aule scolastiche) e ai suoi possibili usi, è efficace iniziare a ripensarlo come un luogo di confronto e di riflessione, rispetto al quale gli allievi possono pronunciarsi, confrontarsi ed eventualmente muovere critiche, allenandosi a una lettura profonda e via via più efficace rispetto al genere.

Le piste operative che possono partire dal testo di matematica – anche limitandosi a considerare, ad esempio, le definizioni – sono moltissime: se ne possono far osservare e commentare, a gruppi, alcune, magari mettendone a confronto qualcuna diversa come struttura ed elementi, sentendo che cosa emerge dai bambini e dai ragazzi dapprima spontaneamente; si può chiedere loro di scegliere la definizione che preferiscono, argomentando il perché, per poi passare a un'osservazione critica sul piano matematico (è davvero la migliore? Quali caratteristiche dovrebbe avere?); si può lavorare sulla riformulazione linguistica e si possono anche produrre ulteriori definizioni (quante? Come? Vanno tutte bene?) per mettere in evidenza come anche a piccoli cambiamenti sul piano linguistico possano corrispondere ambiguità e scorrettezze matematiche; e si può prendere spunto dalle disomogeneità di numero qui illustrate per sfidare allieve e allievi a coglierle per confronto, dando voce alla realtà matematica qualora la lingua presentasse elementi di difformità o facesse percepire delle difficoltà. Ciò confidando nella bontà e, forse, potremmo dire, nella necessità di uno sviluppo sinergico delle competenze matematiche e linguistiche.

Capitolo 6. Conclusioni

6.1 Discussione generale

Questa tesi ha indagato il libro di geometria attraverso diverse prospettive e dimensioni, attivate per acquisire una maggiore comprensione riguardo al tema della testualità del libro di testo di geometria, affinando metodi esistenti ma soprattutto adottando approcci interdisciplinari, intendendo con questa espressione non tanto una lettura che viene da una singola disciplina richiamando aspetti dell'altra, quanto un'effettiva commistione di punti di vista che vengono da ricercatori di entrambe le discipline della linguistica e della didattica della matematica.

In modo più specifico, i cinque capitoli hanno affrontato diverse dimensioni della testualità, con l'obiettivo principale di approfondire le strategie linguistico-argomentative con le quali il libro di testo veicola contenuti di geometria, indagandole da diverse angolazioni.

Il capitolo 2 ha fatto emergere come il libro di testo di geometria comprenda al suo interno elementi semiotici che stanno al di fuori sia della sfera linguistica sia di quella delle rappresentazioni figurali degli enti geometrici, e come questi elementi di testualità multimodale debbano essere presi in considerazione in termini di efficacia comunicativa, al fine di favorire processi cognitivi imprescindibili per il lettore che sta apprendendo la disciplina. In particolare, il capitolo 2 ha mostrato che alcune strategie semiotiche multimodali (uso del colore con funzione di similarità, prossimità di elementi nell'organizzazione spaziale, segnalazione grafica attraverso linee orientate) potrebbero essere utilizzate per invitare il lettore a operare conversioni semiotiche tra rappresentazioni dello stesso ente geometrico espresse attraverso registri semiotici differenti. Allo stesso tempo, dall'analisi dei libri di testo emerge come non vi sia sempre attenzione per questi aspetti, e come le scelte effettuate dai costruttori di senso (Bezemer & Kress, 2010) possano ostacolare una corretta decodifica da parte del lettore, il quale si può trovare a dover coordinare tra loro rappresentazioni diverse degli stessi enti geometrici senza che gli elementi semiotici multimodali cooperino nel veicolare tale coordinamento, sia perché

a volte questi elementi non vengono utilizzati con il fine di invitare alla conversione semiotica, sia perché vengono utilizzati in modo non coerente, generando possibili confusioni.

I capitoli 3 e 4 hanno messo in evidenza come nelle porzioni logico-argomentative dei libri di testo rientrino modalità linguistico-comunicative che presentano tratti di coinvolgimento differenti nei confronti del lettore-allievo, e come possano essere analizzate in modo da far emergere le scelte inferenziali e retoriche presenti al loro interno. In particolare, il capitolo 3 ha messo in evidenza come esistano differenti modalità comunicative con il quale un libro di testo di geometria può proporre argomentazioni al lettore-allievo, modalità che cambiano significativamente con l'evolvere degli anni di scolarità: nei primi anni si predilige l'azione concreta del lettore, attraverso strategie linguistiche che tentano di coinvolgerlo in prima persona nella costruzione dell'argomentazione stessa; andando avanti nei livelli di scolarità, iniziano ad emergere tentativi di portare l'argomentazione sul piano del pensiero, stimolando il lettore a immaginare piuttosto che realizzare concretamente esperienze; fino a giungere all'argomentazione matematica per eccellenza, in cui il discorso viene presentato nel suo massimo grado di astrazione, e attraverso il quale si richiede al lettore uno sforzo cognitivo che si stacca dalle condotte abituali del mondo percettivo, abbandonando un *linguaggio della familiarità* (Balacheff, 1988) sul quale si fa tipicamente affidamento nei primi anni di scolarità. Queste chiavi interpretative permettono di mettere in relazione l'evoluzione dei modi con i quali la disciplina viene comunicata agli allievi con l'evoluzione storico-epistemologica della disciplina, la quale nel corso dei secoli ha gradualmente teso verso una sempre più marcata astrazione. La ricognizione sistematica circa la presenza nel corpus delle tre modalità argomentative (la modalità che fa "fare", che fa "immaginare" e che fa "astrarre") ha permesso di fotografarne con precisione la distribuzione negli anni di scolarità: da questa analisi emerge globalmente come le evoluzioni delle modalità di Movimenti logico-argomentativi presentino forti tratti di discontinuità in coincidenza dei cambi di adozione dei libri di testo e del cambio di ordine scolastico (passaggio dalla III alla IV elementare e dalla V elementare alla I media).

Il capitolo 4 ha invece affrontato in modo specifico la dimensione dialettico-retorica delle argomentazioni nei libri di testo, mettendo in evidenza in primo luogo come possano essere utilizzate categorie della retorica classica e moderna quali sono l'*inventio*, la *dispositio* e l'*elocutio*, per far emergere la complessità di questi testi tanto dal punto di vista delle strategie inferenziali adottate, quanto dal punto di vista delle scelte circa l'ordine e la forma linguistica con cui si struttura il discorso e le frasi interne a esso. I risultati delle analisi condotte svelano un livello di profondità inesplorato, grazie al quale ci si rende conto che esiste una grande varietà di scelte operabili in termini comunicativi, e come ciascuna di queste scelte possa presentare punti di forza e di debolezza a seconda del contesto. In sostanza, viene esplorata una visione della matematica e della sua didattica, per nulla scontata, nella quale occorre ammettere l'importanza di utilizzare in modo conscio strumenti di tipo persuasivo che vadano a sostenere i processi inferenziali cui si sottopongono i lettori-allievi. Grazie all'analisi, inoltre, si è messo in evidenza come il libro di testo possa trattare in modo linguisticamente ambiguo le argomentazioni non dimostrative, ad esempio de-enfatizzando alcuni passaggi induttivi, oppure lasciandoli semplicemente non esplicitati.

Infine, il capitolo 5 ha mostrato come anche gli aspetti grammaticali del libro di testo possano risultare significativi per una corretta interpretazione del testo da parte del lettore, soprattutto nel caso in cui le scelte grammaticali non corrispondano alla realtà extra-testuale matematica cui si fa riferimento. Un primo risultato consiste dunque nel dover ammettere l'importanza di fenomeni linguistici che apparentemente potrebbero essere considerati come minori, o difficili da cogliere. In particolare, il capitolo 5 si è occupato di rilevare come viene gestita la categoria grammaticale del *numero* nelle definizioni degli elementi del poligono; dall'analisi emerge come non vi sia generalmente sufficiente attenzione, da parte di coloro che progettano e scrivono i libri di testo di geometria, nell'effettuare scelte linguistiche di realizzazione del tratto singolare-plurale che siano omogenee e aderenti al contenuto matematico extra-testuale cui si sta facendo riferimento. Quest'affermazione è sostenuta da una ricognizione quantitativa, in tutti i libri del corpus italiano, riguardo alla presenza di disomogeneità nel trattare la numerosità nelle

definizioni degli elementi del poligono. In particolare, viene portata l'attenzione al fatto che la maggior parte (il 59,5%) dei libri del corpus italiano definisca gli elementi dei poligoni in modo disomogeneo dal punto di vista della realizzazione linguistica del plurale-singolare. Riprendendo l'idea classica di definizione come affermazione formata dalla coppia *definiendum-definiens*, vengono identificate sottocategorie di analisi dalle quali emerge come la disomogeneità possa risiedere in uno dei due elementi della coppia. Dagli esempi commentati si evince come alle disomogeneità nel trattare il *numero* nelle definizioni degli elementi dei poligoni corrispondano generalmente significative mancanze di aderenza rispetto al contenuto matematico in gioco le quali, unite alla peculiarità di un testo contenutisticamente complesso e non raramente ricco di inferenze implicite, possono rendere ancora più difficoltosa la costruzione di senso da parte del lettore-allievo.

6.2 Implicazioni

I risultati di questa tesi hanno implicazioni sia dal punto di vista dell'ampliamento della letteratura esistente in didattica della matematica e in linguistica, sia dal punto di vista delle possibili ricadute didattiche.

Globalmente il lavoro si inserisce all'interno delle moderne riflessioni sul rapporto tra linguaggio e apprendimento in matematica (Adoniou & Qing, 2014; Sbaragli & Demartini, 2021; P. L. Ferrari, 2004, 2021; Moschkovich et al., 2018; Parker Waller & Flood, 2016), le quali hanno riconosciuto l'importanza di sviluppare ricerche che aprano prospettive transdisciplinari. Questo lavoro ha ampliato il panorama delle ricerche in atto, arricchendolo attraverso l'analisi interdisciplinare di un corpus di libri di testo, analisi che dunque può essere di proficuo supporto tanto ai ricercatori in didattica della matematica quanto a quelli che si occupano di linguistica, o a un lavoro congiunto tra i due mondi.

In particolare, il capitolo 2 ha consentito di puntare l'attenzione sul fatto che i costruttori di senso di un libro di testo non siano solo gli autori del libro, ma anche coloro che si occupano di aspetti tipografici e di layout di pagina. Tenere in considerazione questi aspetti potrebbe risultare importante per coloro che si occupano di difficoltà del processo

di insegnamento-apprendimento della matematica (P. L. Ferrari, 2021; Jupri & Drijvers, 2016; Laborde, 1995), in particolare per coloro che si occupano delle sue dimensioni semiotiche (Berg, 2013; D'Amore et al., 2017; D'Amore & Santi, 2018; Duval, 2017; Hitt, 2004; Iori, 2015; Presmeg et al., 2016) e multimodali (Arzarello et al., 2009; P. L. Ferrari, 2021; Maffia & Sabena, 2020; Sabena, 2018; Sabena et al., 2016), ma anche per chi si occupa, dal lato della linguistica, di analisi multimodale dei testi (Bateman, 2008; Jewitt et al., 2016; O'Halloran, 2015) e di rapporto tra testo e figure (Paoletti, 2004, 2007, 2011; Schnotz, 2005).

I capitoli 3 e 4 sono dedicati all'ampio tema dell'argomentazione nei libri di testo di matematica, e fanno emergere un panorama testualmente complesso e ricco di elementi afferenti a sfere diverse (lessicali, sintattiche, dialettiche, retoriche ecc.), che tipicamente non vengono prese in considerazione nell'ambito della ricerca in didattica della matematica. Da questo punto di vista, i risultati potrebbero avere implicazioni per le numerose ricerche che si focalizzano in generale sul ruolo dell'argomentazione nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Mariotti, 2006; Martinez & Pedemonte, 2014; Pedemonte, 2008; Stylianides et al., 2016), ma anche per quelle che si occupano di guardare alle argomentazioni degli studenti (Dogan & Williams-Pierce, 2020; Meyer & Schnell, 2020; Rott, 2020) o alle porzioni di libri di testo di matematica in cui si propone al lettore di svolgere esercizi legati allo sviluppo di competenze argomentative (Fujita & Jones, 2014; Otten et al., 2014; Stacey & Vincent, 2009; Stylianides, 2009, 2014). I risultati di questi capitoli possono fornire interessanti spunti di riflessione anche nell'ambito delle ricerche di area linguistica che si occupano di argomentazione, andando ad ampliare gli ambiti in cui queste possono essere applicate (Rigotti & Greco, 2009, 2019; Rocci, 2017; van Eemeren, 2018).

Il capitolo 5 ha messo in risalto come la dimensione grammaticale della lingua sia importante anche nel caso in cui essa si realizza in un linguaggio specialistico, quello matematico, con fine didattico. Da questo punto di vista, i risultati del capitolo consentono di ampliare da un lato le riflessioni sull'importanza di fattori lessicali e morfosintattici nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Branchetti & Viale, 2015; Demartini, Fornara & Sbaragli, 2020; Laborde, 1995), dall'altro i numerosi studi di area

linguistica riguardanti le caratteristiche dei linguaggi settoriali e specialistici dell'italiano (Gotti, 2005; Gualdo & Telve, 2011; Lavinio, 2004; Viale, 2019) anche riferiti al testo scritto e ai libri di testo (Cortelazzo, 1994, 2011; GISCEL Lombardia, 1988; La Grassa & Troncarelli, 2014; Zambelli, 1994).

Dal lavoro di tesi emergono anche implicazioni dal punto di vista delle ricadute didattiche. In generale, si può affermare che il lavoro di tesi conferma l'importanza di tenere in considerazione, oltre a quella strettamente concettuale della disciplina, anche le componenti linguistiche (a vari livelli, dal livello morfologico a quello extra-testuale).

In particolare, i risultati del capitolo 2 suggeriscono che l'insegnante di matematica debba prestare attenzione alle strategie semiotiche che utilizza per favorire l'inevitabile processo di conversione semiotica da parte degli allievi. Questo può avere ripercussioni sulle pratiche legate all'uso della lavagna, alla predisposizione dei testi delle prove a cui si sottopongono gli allievi, nonché in attività di accompagnamento all'interpretazione di testi.

I risultati del capitolo 3 suggeriscono che sia importante prestare attenzione alle capacità cognitive degli studenti di riferirsi a piani esclusivamente astratti di argomentazione, senza che questi vengano gradualmente costruiti attraverso riferimenti alla dimensione concreta dell'esperienza di apprendimento, passando per quella immaginativa. In altre parole, si ribadisce l'importanza di accompagnare gli allievi attraverso quelle fasi che la stessa disciplina ha vissuto nell'arco della sua evoluzione storica, evitando il più possibile passaggi bruschi da un livello scolastico a un altro. In questo modo, si potrebbero gradualmente avvicinare gli studenti alla dimensione più astratta della disciplina, non dimenticando l'imprescindibile legame con il mondo dei sensi e con il linguaggio della quotidianità.

I risultati del capitolo 4 portano a dare peso al tipo di argomenti che vengono usati all'interno di un'argomentazione matematica (l'*inventio*), al modo con il quale vengono disposti (la *dispositio*), e alla loro forma linguistica (l'*elocutio*). Questo può avere importanti ripercussioni nella pratica didattica dell'insegnante, perché consente di

scegliere se adottare strategie argomentative differenti in base non solo all'intuito e all'esperienza, ma anche in base a precise categorie di studio retorico, tenendo così in considerazione fattori di carattere disciplinare ma anche contestuale, legati cioè al particolare uditorio di studenti a cui ci si riferisce. Questa consapevolezza può risultare utile nel momento in cui l'insegnante sceglie il tipo di argomenti da trattare durante una lezione, l'ordine con cui proporli e la loro forma comunicativa. Ad esempio, potrebbe scegliere, in base a considerazioni di tipo didattico ma anche legate allo specifico contesto di classe, se affrontare un nuovo risultato matematico proponendo la tesi seguita da un esempio illustrativo, oppure proporre più esempi che consentono di esplicitare congetture da verificare su più casi; il tutto prestando attenzione agli aspetti di forma con la quale presentare i contenuti. Oppure, l'insegnante potrebbe analizzare con gli studenti un'argomentazione matematica in base ai livelli di *inventio*, *dispositio* ed *elocutio*, portando dunque gli allievi a riflettere sull'importanza di tenere in considerazione questi aspetti al fine di rendere un'argomentazione il più efficace possibile dal lato comunicativo. Infine, il capitolo 5 ha messo in evidenza la significatività degli aspetti del lessico e della morfologia nella trasmissione del sapere matematico in gioco, focalizzandosi in particolare sul livello grammaticale del plurale e del singolare. Questo può portare maggiore consapevolezza nell'insegnante rispetto a questi elementi, e potrebbe attivare pratiche di riflessione sul testo matematico insieme agli studenti, ad esempio utilizzandolo non solo come oggetto di sapere da accogliere acriticamente, ma piuttosto come dispositivo da interrogare, ripensare, sul quale gli attori del processo di insegnamento-apprendimento possono pronunciarsi e confrontarsi.

6.3 Prospettive future di ricerca

I rilievi qualitativi e quantitativi mostrati nella presente dissertazione hanno reso esplicita la profondità di un approccio interdisciplinare di analisi del testo matematico. Questo approccio ha consentito di far emergere peculiarità multimodali, strutturali, semantiche, sintattiche, lessicali del testo geometrico ad uso didattico. Le conclusioni formulate circa la bontà e l'efficacia delle scelte adottate dai costruttori di senso del testo sono rimaste in questa tesi a livello ipotetico, frutto di un'indagine che ha coinvolto esclusivamente il libro

di testo come unità di analisi. Da questo punto di vista, la dissertazione apre globalmente numerose piste di ricerca sperimentale, basate su indagini sul campo con gli studenti.

Il capitolo 2 offre la possibilità per i ricercatori in didattica della matematica e in linguistica di valutare gli effetti delle diverse scelte di realizzazione testuale multimodale sulla comprensione da parte degli studenti. In particolare, si potrebbero attivare ricerche sperimentali (Paoletti, 2000) per indagare se gli elementi semiotici il cui uso è stato identificato come efficace o non efficace dal punto di vista testuale risultino effettivamente tali anche dal punto di vista pedagogico.

I capitoli 3 e 4 offrono la possibilità per i ricercatori in didattica della matematica e in linguistica di attivare progetti di ricerca sperimentali che affrontano l'importante tema delle competenze comunicative e argomentative da un punto di vista interdisciplinare tra matematica e italiano. Saper comunicare e argomentare ha infatti assunto negli ultimi anni un ruolo sempre più importante tra le competenze fondamentali da sviluppare nella formazione degli studenti. Lo testimonia anche il fatto che nei diversi programmi scolastici nazionali, e di conseguenza nei vari quadri di riferimento delle indagini a livello internazionale, lo sviluppo della competenza comunicativa e argomentativa appare oggi come un traguardo di apprendimento cruciale, trasversale e transdisciplinare da perseguire in tutto il percorso educativo partendo dai primi anni scolastici.

In ambito matematico i processi comunicativi e argomentativi creano difficoltà di vario genere agli allievi di ogni ordine di scolarità, come evidenziano i risultati delle prove standardizzate a livello cantonale, nazionale e internazionale, in cui i quesiti che richiedono tali tipi di prestazioni ottengono risultati sensibilmente peggiori rispetto agli altri tipi di domande o vengono lasciati in bianco in percentuali molto significative (Bassani et al., 2012; Di Martino, 2017; Garuti et al., 2012; Sbaragli & Franchini, 2014, 2018). Ciò deriva anche da una tradizione didattica nella quale i momenti comunicativi e argomentativi in classe, soprattutto nelle ore di matematica, sono particolarmente ridotti e delegati solo agli studenti considerati più competenti. In accordo con le analisi condotte nei capitoli 3 e 4, nei libri di testo di matematica sono evidenti discontinuità comunicative nel passaggio tra livelli scolastici, dovute a modalità comunicative e argomentative spesso molto differenti e a volte ricche di impliciti che non favoriscono la comprensione del

ragionamento né costituiscono un esempio efficace di argomentazione. Questi aspetti non incentivano certamente lo sviluppo di competenze esplicative e argomentative negli allievi. Da questo punto di vista, si potrebbero attivare ricerche con il fine, ad esempio, di analizzare se e come evolvono le competenze comunicative e argomentative degli studenti dopo l'esposizione a percorsi didattici interdisciplinari, a cavallo tra la riflessione matematica e quella linguistica, rivolti allo sviluppo di tali competenze.
Infine, il capitolo 5 offre la possibilità di indagare ancor più in profondità l'incidenza di fattori linguistici di tipo lessicale e morfologico, che tipicamente sono poco considerati nella loro dimensione di portatori di significati. Questo potrebbe tradursi nuovamente in progetti di ricerca in cui condurre indagini relative alla comprensione del testo da parte del lettore, focalizzate anche su elementi lessicali minori quali la realizzazione linguistica del singolare-plurale nel linguaggio specialistico della matematica.

6.4 L'unione di due mondi

Una delle esperienze comuni tra chi affronta un percorso di studi universitari in matematica è l'interesse e l'appetito per le strutture logiche della conoscibilità e dell'esattezza dimostrativa: la matematica è prima di tutto una disciplina che si è occupata, oltre che di intuizione e di matematizzazione del reale, di verità e dimostrabilità. In questo senso, essa va a toccare uno dei punti nevralgici dell'esperienza umana, e cioè il desiderio, per riprendere una delle metafore più efficaci del filosofo Edgar Morin, di trovare arcipelaghi di certezza nella navigazione di un oceano di incertezza.
Nel corso dei secoli, questa tensione ha fatto sì che i matematici dedicassero sempre più tempo ed energie a problemi di natura astratta, che meglio addomesticano l'incerto, i quali a loro volta hanno portato a riflettere sui metodi e sui contenuti dell'indagine matematica. In un certo senso, la matematica ha cioè iniziato a rivolgere lo sguardo verso sé stessa, scoprendo così gradualmente una vicinanza a campi d'azione e tematiche di studio relative alla sua capacità di *esprimere*, e cioè al suo linguaggio come sistema di segni all'interno del quale è possibile costruire proposizioni, "dire" qualcosa. Le riflessioni attivate dai logico-matematici del secolo scorso hanno scavato in profondità questioni di tale natura. D'altra parte, e parallelamente, la linguistica ha intrapreso un percorso di analisi per certi

versi complementare, nel quale si è cercato di approfondire i fondamenti logici e scientifici dei suoi oggetti di studio, ovvero le strutture, gli invarianti e le caratteristiche del linguaggio e delle lingue umani. Queste due tendenze si sono accompagnate a tentativi unificanti decisamente suggestivi: basti pensare al sogno leibniziano di una *caracteristica universalis*, un linguaggio formale composto di simboli attraverso il quale poter esprimere concetti di qualsivoglia natura e "calcolare" il grado di verità di una proposizione qualunque. Nonostante il secolo scorso abbia mostrato, grazie a coloro che si sono occupati dei fondamenti delle due discipline, quanto sia improbabile, e fondamentalmente poco utile, la riuscita di un'impresa di aritmetizzazione del linguaggio naturale, allo stesso tempo si sono sviluppate sensibilità comuni, per le quali matematici e linguisti sentono ormai di avere affinità e terreni di indagine sui quali poter dialogare proficuamente[64]. Non è raro incontrare, soprattutto in ambito accademico, matematici e didatti della matematica affascinati dagli studi linguistici e, viceversa, linguisti attirati dalla matematica, come se intuissero l'esistenza di luoghi di convergenza da cui entrambi sono attratti. Io appartengo al primo di questi due gruppi: è per questa sensazione che ci siano spazi comuni, seppure posti a un livello di profondità non facilmente accessibile, e nel quale non è così semplice vedere con nitidezza, che ho accolto la sfida di un dottorato in didattica della matematica e linguistica.

Com'è naturale, entrare all'interno dei domini della linguistica da matematico e didatta della matematica non è stata un'impresa semplice. Vengono richiesti impegno, desiderio di comprendere e applicare i reciproci punti di vista, con il fine non solo di apportare il contributo specifico del proprio ambito di ricerca verso l'oggetto di indagine, ma anche di investire energie per costruire un orizzonte di ricerca davvero nuovo, integrato e comune. Si tratta di un processo complesso, nel quale occorre mettere in discussione continuamente il proprio e l'altrui approccio, mantenendo allo stesso tempo il rispetto verso le tradizioni interne ai singoli ambiti di ricerca. La complessità di questo lavoro è al contempo stimolante e faticosa, perché si tratta di entrare all'interno di aree del sapere per le quali non si posseggono necessariamente coordinate di riferimento sedimentate nel tempo.

[64] Senza contare, poi, i vari esperimenti letterari nei quali il mondo e i linguaggi della matematiche e delle scienze hanno trovato il modo di mostrare tutta la loro potenza immaginativa.

Tuttavia, ripensando all'impulso che mi ha condotto a intraprendere questo percorso, sento di aver quantomeno intravisto alcuni di quei luoghi di convergenza di cui ho parlato poc'anzi: la semiotica, la grammatica, l'argomentazione. Al di là dell'oggetto di studio – il libro di testo – su cui si è innestato il lavoro, l'aspetto che più mi ha stimolato ed entusiasmato ha riguardato l'approfondimento di queste tre aree del sapere, dai due punti di vista della didattica della matematica e della linguistica, e prima di tutto dal punto di vista teorico. Guidato dalle intuizioni e dai consigli dei miei direttori di tesi e colleghi, si è trattato di cercare, all'interno delle varie e numerose tradizioni di ricerca in questi tre ambiti, quelle vie teoriche che potessero in un qualche modo garantire una certa consonanza di strumenti e sistemi di concetti. Forse il frutto più succoso di questi anni sta proprio qui: aver scoperto che queste consonanze esistono davvero, e aver dato qualche motivo in più affinché matematici e linguisti continuino ad approfondire un'istintiva e reciproca simpatia.

Riferimenti bibliografici

Adoniou, M., & Qing, Y. (2014). Language, mathematics and English language learners. *Australian Mathematics Teacher, 70*(3), 3-13.

Antonini, S. (2011). Generating examples: focus on processes. *ZDM - Mathematics Education, 43*, 205-217. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0317-6

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M. A., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. *ZDM - Mathematics Education, 43*(2), 191-194. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0334-5

Aristotele (1996), *Organon. Volume secondo*, a cura di Marcello Zanatta, UTET.

Aristotele (1973). *Opere*. Laterza.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

Austin, J. L. (1987). *Come fare cose con le parole*. Marietti Editore. (Titolo originale: *How to do things with words* pubblicato nel 1962).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège.* Thèse d'état. Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (2001). *Imparare la prova*. Bologna: Pitagora Editrice.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 501-512.

Barrow, M. A. (2014). Even math requires learning academic, *Kappan Magazine*, *95*(6), 35-38. www.lindareedclassroom.com/teaching-resources/ewExternalFiles/Academic%20Vocabulary%20in%20Math.pdf

Barsalou, L. W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, *59*, 617-645.

Bassani, P., Fioravanti, E., Pelillo, M., & Pozio, S. (2012). Le prove INVALSI di matematica nella prima e nella terza classe della scuola secondaria di primo grado (Prova nazionale). *Quaderni SNV – N. 3/2012 MAT. S.*

https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N3_MAT.pdf

Bateman, J. (2008). *Multimodality and Genre. A foundation for the Systematic Analysis of Multimodal Documents*. Palgrave Macmillan.

Bateman, J. A., Delin, J., & Allen, P. (2000). Constraints on layout in Multimodal Document Generation. *Proceedings of First International Natural Language Generation Conference*, Workshop on Coherence in Generated Multimedia, 12 July 2000, Mitzpe Ramon, Israel, 7-14.

Bateman, J. A., & Wildfeuer, J. (2014). A multimodal discourse theory of visual narrative. *Journal of Pragmatics, 74*, 180–208.

Bearne, E. (2004). Multimodal texts: What they are and how children use them. In J. Evans (Ed.), *Literacy moves on*, 16-30. David Fulton Publishers.

Bellucci, C., & Blotti, A. (2017). Un'esemplificazione dagli *Elementi* di Euclide. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 209-220). Fondazione per la Sussidiarietà.

Berg, C. V. (2013). Enhancing mathematics student teachers' content knowledge: Conversion between semiotic representations. In *Proceedings of CERME8 conference*.

Bernardi, C. (2000). Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della 'e'. *Progetto Alice*, *1*(1), 11-21.

Berruto, G. (1987). *Sociolinguistica dell'italiano contemporaneo*. La Nuova Italia Scientifica.

Berruto, G., & Cerruti, M. (2017). *La linguistica: un corso introduttivo*. UTET Università.

Bezemer, J., & Kress, G. (2010). Changing Text: A Social Semiotic Analysis of Textbooks. *Designs for Learning, 3*(1-2), 10-29.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th PME Conference*, Valencia, Spain, 2, 121-128.

Branchetti, L., & Viale, M. (2015). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. In M. Ostinelli (a cura di),

Didattica dell'italiano. Problemi e prospettive (pp. 138-148). Dipartimento Formazione e apprendimento–Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI), Locarno.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM – Mathematics Education*, *43*(2), 269-281.

Canducci, M. (2019). Il rapporto testo-figure nei libri di testo di matematica: il caso dei poligoni analizzato in ottica multimodale, In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica e professionalità docente, Atti del XXXIII convegno di Castel San Pietro Terme* (pp. 107-108). Pitagora.

Canducci, M. (2020). L'incoerenza delle scelte di numero nei libri di testo di geometria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *Didattica della matematica, disciplina scientifica per una scuola efficace, Atti del XXXIV convegno di Castel San Pietro Terme* (pp. 69-70). Pitagora.

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019a). La definizione nei testi scolastici: dall'analisi alla didattica. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 47-48). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n. 5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2019b). Analisi di manuali scolastici di matematica dal punto di vista linguistico e disciplinare. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 43-44). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n. 5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Canducci, M., Demartini, S., Franchini, E., & Sbaragli, S. (2020). I materiali didattici che vorrei: il punto di vista dei docenti di matematica. *Scuola ticinese*, No. 337: Anno XLIX, Serie IV, 1/2020, pp. 57-62.

Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (in press). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola, 3*.

Canducci, M., Rocci, A., & Sbaragli, S. (in press). The influence of multimodal textualization in the conversion of semiotic representations in Italian primary school geometry textbooks. *Multimodal Communication, 10*(2). De Gruyter.

Cardona, G. R. (2006). *Introduzione all'etnolinguistica*. UTET.

Cattani, A. (1994). *Forme dell'argomentare. Il ragionamento tra logica e retorica*. Edizioni GB.

Cavanagh, S. (2005). Math: the not-so-universal language, *Education Week, 24*(42), 1-22.

Colombo, A. (1992). Per una definizione e analisi pragmatica dei testi argomentativi. In G. Gobber (A cura di), *La linguistica pragmatica* (pp. 475-500). Bulzoni.

Colombo, A., & Pallotti, G. (A cura di) (2014). *L'italiano per capire*. Aracne.

Corbett, G. G. (2000). *Number*. Cambridge University Press.

Cornificio (1993). *Rhetorica ad Herennium*. Pàtron.

Corno, D. (2011). "retorica". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*, vol. II. Istituto dell'Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/retorica_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

Cortelazzo, M. (1994). Testo scientifico e manuali scolastici. In M. L. Zambelli (A cura di), *La rete e i nodi. Il testo scientifico nella scuola di base* (pp. 3-14). Quaderni del Giscel. La Nuova Italia.

Cortelazzo, M. (2011). "scienza, lingua della". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani.* Istituto dell'Enciclopedia http://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-della-scienza_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

D'Ambrosio, U. (1985). Ethno mathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Pitagora Editrice.

D'Ambrosio, U. (2007). The role of mathematics in educational systems. *ZDM Mathematics Education*, 39, 173–181. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0012-1

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora.

D'Amore, B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica, 1*, 28-47.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica, 2*, 150-173.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I, & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 2*, 119-162.

D'Amore, B., & Santi, G. (2018). Natural language and "mathematics languages": Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica, 26*(1), 57-82.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia. Dalle origini al miracolo greco*. Dedalo.

D'Amore B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia: dal tramonto greco al medioevo*. Dedalo.

D'Amore B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia: dal rinascimento al XVIII secolo*. Dedalo.

D'Amore B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo*. Dedalo.

D'Aprile, M., Squillace, A., Armentano, P., Cozza, P., D'Alessandro, R., Lazzaro, C., Rossi, G., Scarnati, A. L., Scarpino, G., Servi, G., & Sicilia, R. (2004). Dillo con parole tue. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 27B*(1), 31-51.

Dardano, M. (2008). *Capire la lingua della scienza*. In M. Dardano & G. Frenguelli (A cura di), *L'italiano di oggi* (pp. 173-188), Aracne.

Dehaene, S. (2009). *I neuroni della lettura.* Raffaello Cortina Editore.

Dehaene, S. (2019). *Imparare. Il talento del cervello, la sfida delle macchine*. Raffaello Cortina editore.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In J. Visconti, M. Manfredini & L. Coveri (A cura di), *Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione* (pp. 487-494). Atti del XV Congresso SILFI, Genova, 28-30.05.2018. Firenze: Cesati.

Demartini, S. & Sbaragli, S. (2015). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In: Sbaragli, S. & D'Amore, B. (a cura di), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento*, atti degli *Incontri con la matematica* N. 29, Comune Di Castel S. Pietro Terme, 6-7-8 novembre 2015 (pp. 67-72). Pitagora Editrice.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019a). Le parole che "ingannano". La componente lessicale nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. In B. Di Paola (A cura di), *Pratiche d'aula e ricerca didattica: nuove e vecchie sfide di insegnamento/apprendimento matematico per una scuola competente e inclusiva* (pp. 19-25). "Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 2 Numero speciale n. 5, 2019. G.R.I.M. http://math.unipa.it/~grim/quaderno2_suppl_5_2019.pdf

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019b), La porta di entrata per la comprensione di un problema: la lettura del testo. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 9-43.

Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado, *Italiano LinguaDue*, *12*(2), 160-180. https://riviste.unimi.it/index.php/promoitals/article/view/14979/13889

De Santis, C. (2011). "quantificatori". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia http://www.treccani.it/enciclopedia/quantificatori_%28Enciclopedia-dell%27Italiano%29/

Di Martino, P. (2017). Problem solving e argomentazione matematica. *Didattica della*

matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 1, 23 - 37. https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.2

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Divisione scuola, DECS. https://scuolalab.edu.ti.ch/temieprogetti/pds/Documents/Piano_di_studio_della_scuola_dell_obbligo_ticinese_COMPLETO.pdf

Dogan, M. F., & Williams-Pierce, C. (2020). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 133-155.

Dressler, W. U., & Beaugrande, R. (1984). *Introduzione alla linguistica testuale*. il Mulino.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?* Pitagora editrice.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica, 4*, 585-619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., Lynch, A., Sabouri, P., Knuth, E., & Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 263-283.

Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Zanichelli.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. Falmer Press.

Ferrari, A. (2014). *Linguistica del testo. Principi, fenomeni, strutture.* Carocci editore.

Ferrari, A. (2019). *Che cos'è un testo*. Carocci.

Ferrari, A., & Zampese, L. (2016). *Grammatica: parole, frasi, testi dell'italiano*. Carocci.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *26A*(4), 469-496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. Utet Università.

Ferreiro, E., & Teberosky, A. (1985). *La costruzione della lingua scritta nel bambino*. Giunti Barbera.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, *3*(2), 9-18.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*, 139-162.

Fornara S., & Sbaragli S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33-38). Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2014). *Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici.* In: De Renzo F. & Piemontese M. E. (a cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche.* Atti del convegno GISCEL, Roma, 26-29 marzo 2014 (pp. 211-224), Aracne.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica*, 2, 16-18.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *1*, 38-63. https://doi.org/10.33683/ddm.17.1.3

Fujita, T., & Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, *64*, 81-91.

Garuti, R. (2003). L'Unità cognitiva fra argomentare e dimostrare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *26A*(5), 523-540.

Garuti, R., Impedovo, M., Orlandoni, A., & Paola, D. (2012). Le prove INVALSI di matematica nella terza classe della scuola secondaria di primo grado (Prova Nazionale) e nella seconda classe della scuola secondaria di secondo grado. *Quaderni SNV – N. 4/2012 MAT.* https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N4_MAT.pdf

GISCEL Lombardia (1988). *Analisi di manuali scientifici ed ipotesi di leggibilità*. In A. R. Guerriero (A cura di), *L'educazione linguistica e i linguaggi delle scienze* (pp. 239-265), Quaderni del Giscel. La Nuova Italia.

Godino, A. (2009). L'arte della persuasione: seduzioni del pensiero. *Psychofenia: Ricerca ed Analisi Psicologica*, *20*, 97-128.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Springer.

Gotti, M. (2005). *Investigating Specialized Discourse*. Peter Lang.

Grandi, N. (2011a). "numero". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia http://www.treccani.it/enciclopedia/numero_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

Grandi, N. (2011b). "articolo". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano Treccani*. Istituto dell'Enciclopedia http://www.treccani.it/enciclopedia/articolo_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

Gruppo μ. (1976). *Retorica generale. Le figure della comunicazione*. Bompiani (Titolo originale: *Réthorique générale* pubblicato nel 1970).

Gualdo, R., & Telve, S. (2011). *Linguaggi specialistici dell'italiano*. Carocci.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Edward Arnold.

Halliday, M.A.K. (1994). *An Introduction to Functional Grammar*. Arnold.

Halliday, M. A. K., & Matthiessen, C. M. I. M. (2004). *An introduction to functional grammar*. Arnold.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329-354.

Iacona, A. (2005). *L'argomentazione*. Einaudi.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*. Ph.D. thesis. Università degli studi di Palermo.

Jackendoff, R. (1990). *Semantic structures*. The MIT Press.

Jewitt, C., Bezemer, J., & O'Halloran, K. L. (2016). *Introducing Multimodality*. Routledge.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481-2502.

Kjeldsen, J. E. (2015). The study of visual and multimodal argumentation. *Argumentation*, *29*(2), 115-132.

Kopperschmidt, J. (1985). An Analysis of Argumentation. In T. A. van Dijk (Ed.), *Handbook of Discourse Analysis*, vol. II, *Dimensions of Discourse* (pp. 159-168). Academic Press.

La Grassa, M., & Troncarelli, D. (2014). *Comprendere le scienze attraverso i manuali scolastici*. In A. Colombo & G. Pallotti (A cura di), *L'italiano per capire* (pp. 293-309). Aracne.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *2*, 121-135.

Lakoff, G., & Nùñez, R. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Bollati Boringhieri. (Ttitolo originale: *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* pubblicato nel 2000).

Lala, L. (2011). “testo, tipi di”. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell’Italiano Treccani*, vol. II. Istituto dell’Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/tipi-di-testo_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

LaSpina, J. A. (1988). *The visual turn and the transformation of the textbook*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lausberg, H. (1969). *Elementi di retorica*. il Mulino (Titolo originale: *Elemente der Literarischen Rhetorik*, pubblicato nel 1949).

Lavinio, C. (2000). Tipi testuali e processi cognitivi. In F. Camponovo & A. Moretti (A cura di), *Didattica ed educazione linguistica* (pp. 125–144). La Nuova Italia.

Lavinio, C. (2004). *Comunicazione e linguaggi disciplinari. Per un’educazione linguistica trasversale*. Carocci.

Lawson, A. E., & Renner, J. W. (1975). Relationships of concrete and formal operational science subject matter and the developmental level of the learner. *Journal of research in science teaching, 12*, 347-358.

Levorato, M. C. (2000). *Le emozioni della lettura*. Il Mulino.

Lo Cascio, V. (1991). *Grammatica dell'argomentare. Strategie e strutture*. La Nuova Italia.

Lumbelli, L. (1989). *Fenomenologia dello scrivere chiaro*. Editori Riuniti.

Lumbelli, L. (2009). *La comprensione come problema. Il punto di vista cognitivo*. Laterza.

Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 69-80.

Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, *3*, 298-305.

Maffia, A., & Sabena, C. (2020). On the mathematics teacher’s use of gestures as pivot signs in semiotic chains. *For the Learning of Mathematics, 40*(1), 15-21.

Maggi, A. (2017). Funzioni dell’inferenza nel ragionare matematico. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 221-237). Fondazione per la Sussidiarietà.

Mann, W. C., & Thompson, S. A. (1988). Rhetorical structure theory: toward a functional theory of text organization. *Text, 8*(3), 243–281.

Marazzini, C. (2001). *Il perfetto parlare. La retorica in Italia da Dante a Internet*. Carocci.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173–204). Sense Publishers.

Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 125-149.

Mejía-Ramos, J. P., & Weber, K. (2020). Using task-based interviews to generate hypotheses about mathematical practice: mathematics education research on mathematicians' use of examples in proof-related activities. *ZDM – Mathematics Education, 52*, 1099-1112.

Merchant, B. (1999). Ghosts in the classroom: unavoidable casualties of a principal's commitment to the status quo. *Journal of Education for Students Placed at Risk, 4*(2), 153-171.

Meyer, M., & Schnell, S. (2020). What counts as a "good" argument in school? How teachers grade students' mathematical arguments. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 35–51.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). Indicazioni nazionali per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Le Monnier. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 223-239.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically. The discourse of investigation*. Routledge.

Mortara Garavelli, B. (1988). Textsorten/Tipologia di testi. In G. Holtus, M. Metzeltin & C. Schmitt (Eds.), *Lexikon der Romanistischen Linguistik* (pp. 157-168). Niemeyer.

Mortara Garavelli, B. (2020). *Manuale di retorica.* Bompiani (edizione originale pubblicata nel 1988).

Moschkovich, J. N., Wagner, D., Bose, A., Rodrigues Mendes, J., & Schütte, M. (2018). *Language and Communication in Mathematics Education. International Perpectives*.

Springer.

National council of teachers of mathematics (2000). *Principles and standard for school mathematics*. National council of teachers of mathematics.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical Imagination and Embodied Cognition. Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159-174.

O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour. 40*(A), 63-74.

O'Halloran, K. L., & Smith, B. A. (2013). Multimodal text analysis. In C. Chapelle (Ed.) *Encyclopaedia of Applied Linguistics*. Wiley-Blackwell.

Otten, S., Males, L. M., & Gilbertson, N. J. (2014). The introduction of proof in secondary geometry textbooks. *International Journal of Educational Research, 64*, 107-118.

Paoletti, G. (2000). *Introduzione alla pedagogia sperimentale*. Carocci.

Paoletti, G. (2004). Writing-to-learn and graph drawing as aids for the integration of text and graphs. In G. Rijlaarsdam, H. Van den Bergh & M. Couzijn (Eds.), *Studies in writing. Effective learning and teaching or writing*, Seconda Edizione (pp. 587-598). Kluwer Academic Publishers.

Paoletti, G. (2007). Problems in the integration of text and graphs. *OpenstarTS*. http://hdl.handle.net/10077/2545

Paoletti, G. (2011). *Comprendere testi con figure. Immagini, diagrammi e grafici nel design per l'istruzione*. Franco Angeli.

Parker Waller, P., & Flood, C. (2016). Mathematics as a universal language: transcending cultural lines. *Journal for Multicultural Education, 10*(3), 294-306. https://doi.org/10.1108/JME-01-2016-0004

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM – Mathematics Education*, *40*(3), 385-400.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM – Mathematics Education*, *43*(2), 257-267.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2013). *Trattato dell'argomentazione. La nuova retorica*. Giulio Einaudi editore (Titolo originale: *La nouvelle rhétorique. Traité de l'Argumentation* pubblicato nel 1958).

Perkins, I., & Flores, A. (2002). Mathematical notations and procedures of recent immigrant Students, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 346-351.

Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development, 15*, 1-12.

Piazza, F. (2015). *La Retorica di Aristotele. Introduzione alla lettura*. Carocci.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: communication in mathematics Classrooms*. Routledge.

Pimm, D. (1991). Metaphoric and metonymic discourse in mathematics calssrooms. In R. G. Underhill (Ed), *North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education, Proceedings of the annual meeting* (p. 349). Volumes 1 and 2.

Pollaroli, C., & Rocci, A. (2015). The argumentative relevance of pictorial and multimodal metaphor in advertising. *Journal of argumentation in context*, *4*(2), 158-199.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer Nature.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 91-95.

Rigotti, E., & Greco, S. (2009). Argumentation as an Object of Interest and as a Social and Cultural Resource. In N. M. Mirza & A.-N. Perret-Clermont (Eds.), *Argumentation and Education: Theoretical Foundations and Practices* (pp. 1-61). Springer.

Rigotti, E., & Greco, S. (2019). *Inference in Argumentation: A Topics-Based Approach to Argument Schemes.* Springer.

Robutti, O. (2006). Embodied cognition e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 163-186.

Rocci, A. (1996). *Valori comunicativi della posizione dell'aggettivo in italiano*. Vita e pensiero.

Rocci, A. (2017). Ragionevolezza dell'impegno persuasivo. In P. Nanni, E. Rigotti & C. Wolfsgruber (A cura di), *Argomentare per un rapporto ragionevole con la realtà* (pp. 88-120). Fondazione per la Sussidiarietà.

Rocci, A., & Pollaroli, C. (2018). Introduction: Multimodality in argumentation. *Semiotica*, *2018*(220), 1-17.

Rossari, C. (1994). *Les opérations de reformulation*. Peter Lang AG.

Roth, W.M. (Ed.). (2009). *Mathematical Representation at the Interface of Body and Culture*. Information Age Publishing.

Rott, B. (2020). Inductive and deductive justification of knowledge: epistemological beliefs and critical thinking at the beginning of studying mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *106*, 117-132.

Rousseau, J. J. (1950). *Emilio e altri scritti pedagogici*. Sansoni (Titolo originale: *Emile ou de l'éducation* pubblicato nel 1898).

Rovere, G. (2010). "Linguaggi settoriali". In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell'Italiano* Istituto della Enciclopedia Italiana, 1, 804-806.

Sabatini, F. (1999). "Rigidità-esplicitezza" vs "elasticità-implicitezza": possibili parametri massimi per una tipologia dei testi. In G. Skytte & F. Sabatini (A cura di), *Linguistica testuale comparativa. In memoriam Maria-Elisabeth Conte* (pp. 141-172). Atti del Congresso interannuale della Società di Linguistica Italiana (Copenhagen, 5-7 febbraio 1998). Museum Tusculanum Press.

Sabena, C. (2018). Multimodality and the Semiotic Bundle lens: A constructive resonance with the Theory of Objectification. *PNA*, *12*(4), 185-208.

Sabena, C., Krause, C., & Maffia, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *XXXIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della matematica*, 28-30 January 2016. Rimini.

Salvi, G. (2013). *Le parti del discorso*. Carocci.

Salvi, G., & Vanelli, L. (2004). *Nuova grammatica italiana*. il Mulino.

Sbaragli, S. (2006). L'armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (A cura di), *La Matematica e la sua Didattica, vent'anni di impegno*

(pp. 257-260). Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, Italy, 23 September 2006. Carocci.

Sbaragli S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In B. Bolondi & M. I. Fandiño Pinilla (A cura di), *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica* (pp. 121-139). Edises.

Sbaragli, S., Canducci, M., & Demartini, S. (in stampa). Le modalità logico-argomentative nei testi scolastici di geometria della scuola elementare e media in lingua italiana. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *9*.

Sbaragli, S., & Demartini, S. (A cura di). (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Dedalo.

Sbaragli, S., Demartini, S., Franchini, E., & Canducci, M. (2020). Grado di soddisfazione e utilizzo del libro di testo di matematica da parte dei docenti di scuola primaria italiana. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete*, *20*(3), 132-153. http://dx.doi.org/10.13128/form-9244

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Dipartimento formazione e apprendimento. https://www4.ti.ch/fileadmin/DECS/DS/documenti/pubblicazioni/ricerca_educativa/2014-Valutazione_didattica_delle_prova_standardizzate_di_matematica_della_quarta.pdf

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2018). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Dipartimento formazione e apprendimento. http://www.supsi.ch/dfa/pubblicazioni/didattica-matematica/prove-standardizzate

Sbisà, M. (1989). *Linguaggio, ragione, interazione*. il Mulino.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia learning*. Cambridgne University Press.

Serianni, L. (2003). *Italiani scritti*. il Mulino.

Serianni, L. (2010). “lingua scritta”. In R. Simone (A cura di), *Enciclopedia dell’Italiano Treccani*, vol. I. Istituto dell’Enciclopedia. https://www.treccani.it/enciclopedia/lingua-scritta_(Enciclopedia-dell%27Italiano)/

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational researcher*, *27*(2), 4-13.

Sfard, A. (2000). Symbolizing Mathematical Reality Into Being - Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other, in Cobb, P., E.Yackel and K.McClain (Eds.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics*, *46*(1), 13-57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Snow, C. P., & Snow, B. (1959). *The two cultures and the scientific revolution* (Vol. 960). Cambridge: Cambridge University Press.

Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Pitagora editrice.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 271–288.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks, *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, *64*, 63-70.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The*

Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp. 315-351). Sense Publishers.

Thibault, P. J. (2001). Multimodality and the school science textbook. In C. T. Torsello-Taylor, G. Brunetti & N. Penello (Eds.), *Corpora Testuali per Ricerca, Traduzione e Apprendimento Linguistico* (pp. 293–335). Unipress.

Thompson, P. W., & Sfard, A. (1994). Problems of reification: Representations and mathematical objects. In *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, North America, Plenary Sessions, Vol. 1 (pp. 1-32). Lousiana State University.

Toulmin, S. E. (1975). *Gli usi dell'argomentazione.* Rosenberg & Sellier. (Titolo originale: *The uses of argument* pubblicato nel 1958).

Troncarelli, D., & La Grassa, M. (2015). Imparare l'italiano attraverso lo studio delle scienze. In M. Ostinelli (A cura di), *Quale didattica per l'italiano. Problemi e prospettive* (pp. 149-159). Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana, Dipartimento formazione e apprendimento.

van Eemeren, F. H. (2013). In what sense do modern argumentation theories relate to Aristotle? The case of pragma-dialectics. *Argumentation, 27*(1), 49-70.

van Eemeren, F. H. (2015). *Reasonableness and Effectiveness in Argumentative Discourse: Fifty Contributions to the Development of Pragma-Dialectics*. Springer.

van Eemeren, F. H. (2018). *Argumentation Theory: a pragma-dialectical perspective*. Springer.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*, Academic Press.

Viale, M. (2016). Il manuale scolastico: un ibrido da perfezionare. In Treccani, *Lingua Italiana*. http://www.treccani.it/magazine/lingua_italiana/speciali/scienze/Viale.html

Viale, M. (2019). *I fondamenti linguistici delle discipline scientifiche. L'italiano per la matematica e le scienze a scuola*. Cleup.

Waller, R. (1987). *The typographic contribution to language: towards a model of typographic genres and their underlying structures*. Ph.D. Thesis, Department of Typography & Graphic, University of Reading.

Walton, D., Reed, C., & Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes*. Cambridge University Press.

Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.

Watzlawick, P., Beavin, J., Jackson, D. P. (1971). *La pragmatica della comunicazione umana*. Astrolabio Editore (ed. orig. 1971).

Werlich, E. (1982). *A text grammar of English*. Quelle & Meyer.

Whately, R. (1963). *Elements of rhetoric*. Southern Illinois University Press (edizione originale pubblicata nel 1828).

Wilson, D. (2011). The conceptual-procedural distinction: Past, present and future. In V. Escandell-Vidal, M. Leonetti & A. Ahern (Eds.), *Procedural Meaning: Problems and Perspectives* (pp. 3-31). Emerald Group Publishing.

Zambelli, M. L. (A cura di) (1994). *La rete e i nodi*. *Il testo scientifico nella scuola di base*. La Nuova Italia.